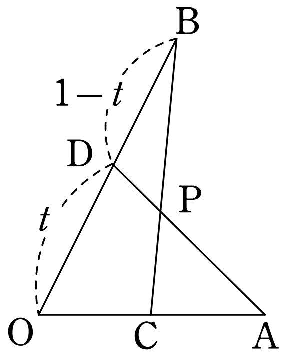
数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B・数学C）

$\boxed{1}$

(1)　$0<t<1$



△OADと直線 BCについて，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1 \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{1-t}{1}=1$$

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{1}{1-t}$ だから AP ： PD$=1$ ： $(1-t)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2-t}=\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{2-t}$ …[答]

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\leqq 1^2$ を満たすとき (1)より $\left|\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{2-t}\right|^2\leqq 1$

$$(1-t)^2\left|\vec{a}\right|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2\leqq(2-t)^2$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$だから

$$(1-t)^2+t(1-t)+4t^2\leqq(2-t)^2$$

整理して　$t^2+t-1\leqq 0$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$0<t<1$ より，$0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

点Pが座標(x, y)の位置にあるとき，1回の運動で

$(x+1, y)$，$(x-1, y)$，$(x, y+1)$，$(x, y-1)$，

$(x+1, y+1)$，$(x-1, y+1)$，$(x+1, y-1)$，$(x-1, y-1)$

に移動する事象をそれぞれB_1，B_2，B_3，B_4，C_1，C_2，C_3，C_4とする。

(1)　$|x_1|=1$ かつ $|y_1|=1$ となるのは

$(x_1, y_1)=(1, 1)$，$(-1, 1)$，$(1, -1)$，$(-1, -1)$のとき

よって，1回の運動で事象C_1，C_2，C_3，C_4のいずれかが起こるときなので，求める確率は

$$\frac{1}{36}\times 4=\frac{1}{9}$$ …[答]

(2)　$|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となるのは

$(x_n, y_n)=(n, n)$，$(-n, n)$，$(n, -n)$，$(-n, -n)$のとき

よって，n回の運動で事象C_1，C_2，C_3，C_4がそれぞれn回連続して起こるときなので，求める確率は

$$\left(\frac{1}{36}\right)^n\times 4=4\left(\frac{1}{36}\right)^n$$ …[答]

(3)　$x_n=n$ のとき n回の運動でn回とも事象B_1，C_1，C_3のいずれかが起こるときなので，求める確率は

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\right)^n=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$ …[答]

(4)　n回の運動後，$|x_n|=n$，$|y_n|=n$ となる事象をそれぞれX，Yとする。また，事象Xが起こる確率を$P(X)$と表し，以下同様の表し方をする。(2)，(3)より

$$P(X)=2\left(\frac{1}{6}\right)^n,\quad P(Y)=2\left(\frac{1}{6}\right)^n,\quad P(X\cap Y)=4\left(\frac{1}{36}\right)^n$$

以上より，求める確率$P(X\cup Y)$は

$$\begin{aligned}P(X\cup Y)&=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)\\&=2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n-4\left(\frac{1}{36}\right)^n\\&=4\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{36}\right)^n\right\}\end{aligned}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1) $$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ ゆえ

$$b_1=a_2-a_1=4,\quad b_{n+1}=4b_n$$

よって，$b_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$ …[答]

(2) $a_{n+1}-a_n=4^n$ ゆえ

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k\\&=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}\\&=\frac{4^n-1}{3}\end{aligned}$$

$n=1$ とすると，$a_1=\dfrac{4-1}{3}=1$ より

$n=1$ で成り立つ

よって，$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$ …[答]

(3) $$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}ka_k\\&=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4^k-1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot 4^k-\sum_{k=1}^{n}k\right)\end{aligned}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 4^k$ とすると

$$S_n=1\cdot 4+2\cdot 4^2+\cdots\cdots+n\cdot 4^n$$

$$4S_n=\qquad 1\cdot 4^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$$

辺々引いて

$$\begin{aligned}-3S_n&=4+4^2+\cdots\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}\\&=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}\end{aligned}$$

よって，$S_n=\dfrac{4-4^{n+1}+3n\cdot 4^{n+1}}{9}$

$$= \frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+4}{9}$$

$$T_n = \frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+4}{27} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k$$

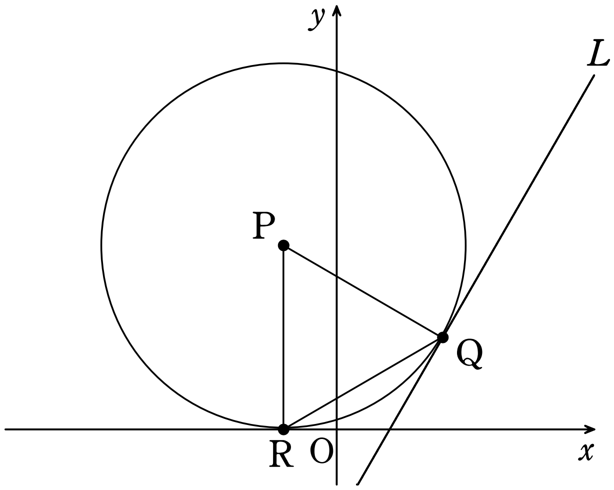
$$= \frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+4}{27} - \frac{n(n+1)}{6}$$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

問題文より次のような図となる



(1)　△PQRは正三角形より

$$\angle \mathrm{RPQ}=60^\circ$$

したがって，直線PQの傾きは

$$\tan(-30^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots[答]$$

また，直線PQと直線 L は垂直より，直線 L の傾きは

$$\sqrt{3} \qquad \cdots[答]$$

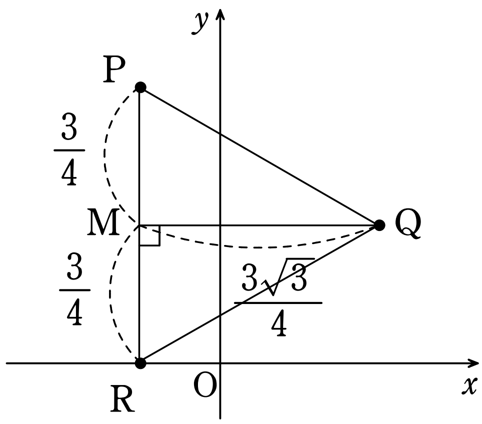
(2)　点Qが放物線 F：$y=x^2$ 上にあるので，Q(t, t^2) とおける。

放物線 F の点Qにおける接線の傾きは $2t$ となり，(1)より

$$2t=\sqrt{3}$$

$$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ となる。



点Qから直線PRに引いた垂線と直線PRの交点をMとおくと

$$\mathrm{MR}=\frac{3}{4}$$

なので，

$$\mathrm{QM}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

したがって，点Pの x 座標は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，点Pの座標は

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{2}\right)$$ …[答]

(3)　直線PQの方程式は

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

直線PQと放物線 F の交点の x 座標は

$$x^2=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

$$4\sqrt{3}x^2+4x-5\sqrt{3}=0$$

ここで，直線PQと放物線 F の交点の x 座標の 1 つが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$(2x-\sqrt{3})(2\sqrt{3}x+5)=0$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

したがって，求める面積は

$$\int_{-\frac{5\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}\right)-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{5\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

$$=\frac{32\sqrt{3}}{27}$$

…[答]

高松高等予備校