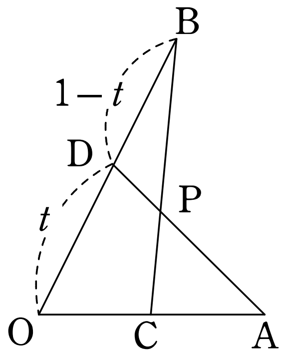
数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C）

$\boxed{1}$

(1)　$0<t<1$

△OADと直線 BC について，メネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1 \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{1-t}{1}=1$$

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{1}{1-t}$ だから AP ： PD＝1 ：$(1-t)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2-t}=\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{2-t}$　…[答]

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\leqq 1^2$ を満たすとき (1)より $\left|\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{2-t}\right|^2\leqq 1$

$$(1-t)^2\left|\vec{a}\right|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2\leqq(2-t)^2$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$だから

$$(1-t)^2+t(1-t)+4t^2\leqq(2-t)^2$$

整理して　$t^2+t-1\leqq 0$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$0<t<1$ より，$0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

点Pが座標(x, y)の位置にあるとき，1回の運動で

$(x+1, y)$，$(x-1, y)$，$(x, y+1)$，$(x, y-1)$，

$(x+1, y+1)$，$(x-1, y+1)$，$(x+1, y-1)$，$(x-1, y-1)$

に移動する事象をそれぞれB_1，B_2，B_3，B_4，C_1，C_2，C_3，C_4とする。

(1)　$|x_1|=1$ かつ $|y_1|=1$ となるのは

$(x_1, y_1)=(1, 1)$，$(-1, 1)$，$(1, -1)$，$(-1, -1)$のとき

よって，1回の運動で事象C_1，C_2，C_3，C_4のいずれかが起こるときなので，求める確率は

$$\frac{1}{36}\times 4=\frac{1}{9}$$

…[答]

(2)　$|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となるのは

$(x_n, y_n)=(n, n)$，$(-n, n)$，$(n, -n)$，$(-n, -n)$のとき

よって，n回の運動で事象C_1，C_2，C_3，C_4がそれぞれn回連続して起こるときなので，求める確率は

$$\left(\frac{1}{36}\right)^n\times 4=4\left(\frac{1}{36}\right)^n$$

…[答]

(3)　$x_n=n$ のとき n 回の運動で n 回とも事象B_1，C_1，C_3のいずれかが起こるときなので，求める確率は

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\right)^n=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

…[答]

(4)　n回の運動後，$|x_n|=n$，$|y_n|=n$となる事象をそれぞれX，Yとする。また，事象Xが起こる確率を$P(X)$と表し，以下同様の表し方をする。(2)，(3)より

$$P(X)=2\left(\frac{1}{6}\right)^n,\quad P(Y)=2\left(\frac{1}{6}\right)^n,\quad P(X\cap Y)=4\left(\frac{1}{36}\right)^n$$

以上より，求める確率$P(X\cup Y)$は

$$\begin{aligned}P(X\cup Y)&=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)\\&=2\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n-4\left(\frac{1}{36}\right)^n\\&=4\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{36}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ …[答]

(2) 正の整数 n に対して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) \quad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき明らかに成り立つ。

[2] $n=k$ (kは1以上の整数) のとき(A)が成り立つと仮定すると

$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$

両辺に $(\cos\theta+i\sin\theta)$ を掛けて

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=\{\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\}(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos(k\theta)\cos\theta-\sin(k\theta)\sin\theta\\&\qquad+i\{\sin(k\theta)\cos\theta+\cos(k\theta)\sin\theta\}\\&=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]から，すべての正の整数 n について(A)は成り立つ。

[証明終]

(3) (a) より $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とおける。

ここで $z^5+z=\cos5\theta+i\sin5\theta+\cos\theta+i\sin\theta$

$=\cos5\theta+\cos\theta+i(\sin5\theta+\sin\theta)$

(b) よりこれが実数であるから

$\sin5\theta+\sin\theta=0$

$2\sin3\theta\cos2\theta=0$

よって $\sin3\theta=0$ または $\cos2\theta=0$

(i) $\sin3\theta=0$ のとき

$0<3\theta<3\pi$ だから $3\theta=\pi,\ 2\pi$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$

ゆえに $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3},\ \cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(ii)　$\cos 2\theta=0$ のとき

$0<2\theta<2\pi$　だから　$2\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$

ゆえに　$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4},\quad \cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2},\quad \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$

(i), (ii)より

$z=\dfrac{\pm 1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad \dfrac{\pm\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

$$f(x)=|x-a|e^{x}=\begin{cases}(x-a)e^{x} & (x \geqq a\text{ のとき})\\ -(x-a)e^{x} & (x<a\text{ のとき})\end{cases}$$

$$g(x)=|x+a|e^{-x}=\begin{cases}(x+a)e^{-x} & (x \geqq -a\text{ のとき})\\ -(x+a)e^{-x} & (x<-a\text{ のとき})\end{cases}$$

(1)　$a \geqq 1$ より

$$g(a)-f(a)=2ae^{-a}-0=2ae^{-a}>0$$

よって，$f(a)<g(a)$

また

$$f(2a)-g(2a)=ae^{2a}-3ae^{-2a}=a\cdot\frac{e^{4a}-3}{e^{2a}}$$

ここで，$e>2$，$a \geqq 1$ より，$e^{4a}>2^{4a} \geqq 2^{4}=16>3$

よって，$f(2a)>g(2a)$ [証明終]

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とすると

$0<x<a-1$ $(a>1)$ のとき

$$h(x)=-(x-a)e^{x}-(x+a)e^{-x}$$

$$\begin{aligned}h'(x)&=-e^{x}-(x-a)e^{x}-e^{-x}+(x+a)e^{-x}\\&=-(x-a+1)e^{x}+(x+a-1)e^{-x}\end{aligned}$$

ここで，$x-a+1<0$，$e^{x}>0$，$x+a-1>0$，$e^{-x}>0$ より

$0<x<a-1$ のとき，$h'(x)>0$

よって，$h(x)$ は単調増加となる。

$h(0)=f(0)-g(0)=a-a=0$ から

$0<x<a-1$ のとき，$h(x)>0$

よって，$0<x<a-1$ のとき，$f(x)>g(x)$ [証明終]

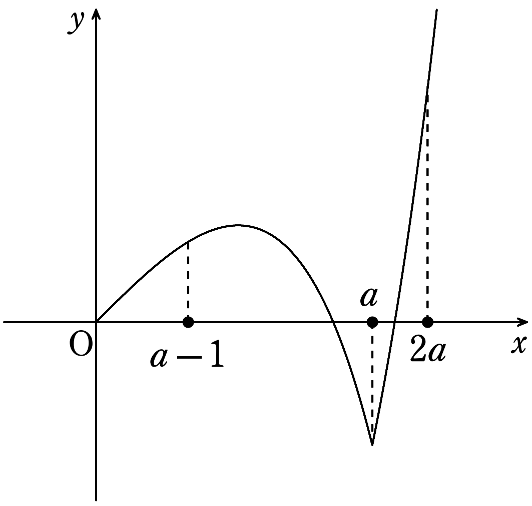
(3)　$h(x)=|x-a|e^{x}-|x+a|e^{-x}$

$$\begin{aligned}h(-x)&=|-x-a|e^{-x}-|-x+a|e^{x}\\&=-\left(|x-a|e^{x}-|x+a|e^{-x}\right)\\&=-h(x)\end{aligned}$$

となり，$h(x)$ は奇関数である。そこで $x \geqq 0$ のときを考える。

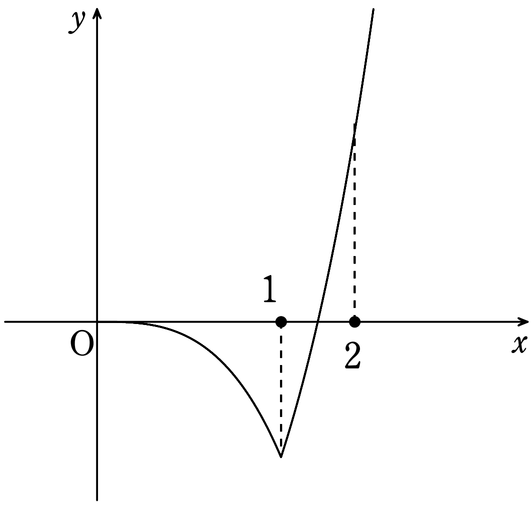
(1)，(2) より，$h(a)=f(a)-g(a)<0$，$h(2a)=f(2a)-g(2a)>0$

$a>1$ のとき



$x \geqq 0$ において， $h(x)=0$ は $x=0$ と $a-1$ と a の間， a と $2a$ の間に少なくとも3つの解をもつ。したがって， $h(x)=0$ は 少なくとも5つの解をもつので不適。

一方， $a=1$ のとき



$x \geqq 0$ において， $h(x)=0$ は $x=0$ と 1 と 2 の間に 1 つ，あわせて 2 つの解をもつしたがって， $h(x)=0$ は 3 つの解をもつ。

すなわち C と D は共有点を3 個もつ.

以上のことより， 題意を満たすのは $a=1$のときである。 …[答]

高松高等予備校