物　理

「解答上の注意」

問題に単位の指定がない場合，用いられる記号はSI(国際単位系)単位に従っているものとする。各問いに対する解答では{　}内に記号が示されている場合には，その記号のうち必要なものを用いて記せ。示されていない場合は，各問いの指示に従って解答せよ。

第1問

地球の公転と，太陽に近づく小惑星に関する次の問い(**問1～6**)に答えよ。なお，太陽の質量をM，万有引力定数をGとし，太陽以外の天体からの万有引力の影響はないものとする。

問1　地球の公転を等速円運動と仮定するとき，次の(1)～(3)に答えよ。ただし，地球の質量をm_{E}，速さをv，軌道半径をrとする。

(1) 地球が従う運動方程式を示せ。$\{G, M, m_{\mathrm{E}}, r, v\}$

(2) 速さvを求めよ。$\{G, M, m_{\mathrm{E}}, r\}$

(3) 地球の公転運動における力学的エネルギーEを求めよ。ただし，太陽の万有引力による位置エネルギーは，無限遠を0とする。$\{G, M, m_{\mathrm{E}}, r\}$

次に，質量m_0の小惑星が，遠方から加速しながら太陽に近づいてきた。太陽の半径をRとする。図1に示す太陽の中心 O から距離$3R$だけ離れた点 P に小惑星が到達したとき，小惑星の速さはv_1となり，進行方向は線分 OP に垂直となった。小惑星の速さは，無限遠で0であったとする。小惑星は，点 P に到達した瞬間に分裂し，質量mの破片を前方に放出した。分裂後，小惑星本体に対する破片の相対速度はv_1であったとする。

問2　分裂直前の小惑星の速さv_1を求めよ。$\{G, M, m_0, m, R\}$

問3　分裂直後の小惑星の速さv_2はv_1の何倍か，運動量保存の法則を用いて求めよ。

$\{G, M, m_0, m, R\}$

問4 放出した破片の質量 m がある値 m_1 と等しくなると，分裂後の小惑星は太陽のまわりを円軌道で公転する。このときの m_1 を求めよ。$\{m_0\}$

問5 放出した破片の質量 m がある値 m_2 を超えると，分裂後の小惑星は太陽に衝突する。面積速度一定の法則と，力学的エネルギー保存の法則を用いることにより，このときの m_2 を求めよ。$\{m_0\}$

問6 $0 < m < m_1$，$m_1 < m < m_2$，$m_2 < m$ それぞれの場合における分裂後の小惑星の軌道の概形として最も適切なものを，図2の(ア)～(ク)から選び，記号で答えよ。

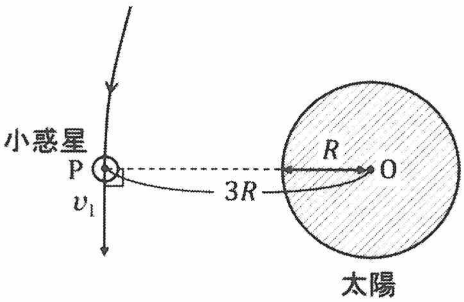

図1

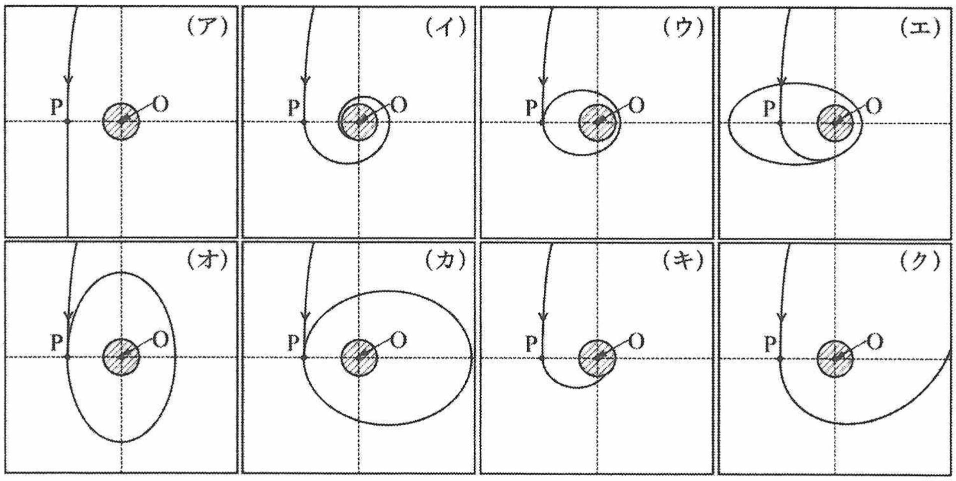

図2

第2問

図 3 のように，抵抗値 R の抵抗 R_1, R_2, R_3，電気容量 C のコンデンサーC_1, C_2，電圧 E の直流電源 E，自己インダクタンス L のコイル L_1，スイッチ S_1, S_2, S_3, S_4 で構成された回路がある。回路中に示す点 X, Y での，電源の負極に対する電位を，それぞれ V_X, V_Y とする。また，全てのスイッチが開き，コンデンサーに電荷がない状態を初期状態とする。次の問い（**問1～5**）に答えよ。

問 1 初期状態から，S_2 を閉じた後，S_1 を閉じた。この直後に S_1 に流れる電流の大きさを求めよ。$\{R, C, L, E\}$

問 2 その後十分に時間が経つと S_1 に流れる電流は一定になった。このとき S_1 に流れる電流の大きさを求めよ。$\{R, C, L, E\}$

続いて S_1 を閉じたまま S_2 を開き，その後 S_3 を閉じて十分に時間を経過させた。

問 3 十分に時間を経過させた後での V_X, V_Y を求めよ。$\{R, C, L, E\}$

コンデンサーを完全に放電し，全てのスイッチを開いて初期状態に戻した。その後，S_1, S_3 を閉じた。

問 4 十分に時間が経過したときのコンデンサーC_1, C_2 に蓄えられる静電エネルギーをそれぞれ求めよ。$\{R, C, L, E\}$

次に S_1, S_3 を開き，S_4 を閉じると，コンデンサーC_1, C_2，コイル L_1 からなる閉回路に，図 4 のように，時計回りに $I_0 \sin \omega t$ の電流が流れた。ここで t は S_4 を閉じた時刻からの経過時間，ω は角周波数を表す。ただし $\omega > 0$ とする。

問5 この閉回路について，次の文章中の空欄 **ア～エ** に入る最も適切な数式を答えよ。ただし **ア～ウ**は$\{R, C, L, E, I_0\}$，**エ**は$\{R, C, L, E\}$から必要なものを用いよ。

V_X，V_Y はそれぞれ $L\omega I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$，$-\frac{1}{C\omega} I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ となる。ここから $\omega =$ [　**ア**　]が導ける。この閉回路は，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーがコイルに移動し，再びコンデンサーに戻ることを繰り返している。$t = 0$ のコンデンサーC_1 と C_2 に蓄えられた静電エネルギーの合計は[　**イ**　]であり，その後コイルL_1に蓄えられるエネルギーの最大値は[　**ウ**　]と表せるため，[　**イ**　]=[　**ウ**　]の式が得られ，I_0 = [　**エ**　]が求まる。

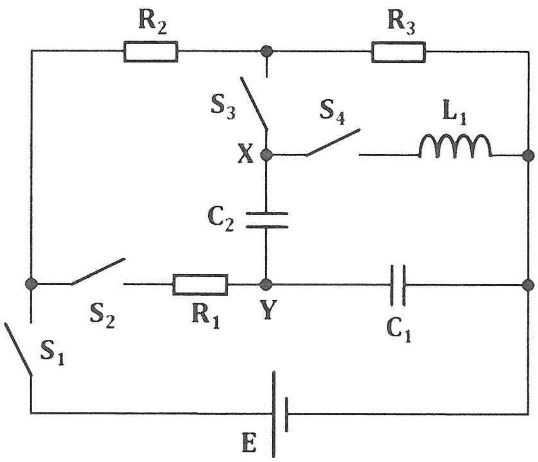

図3

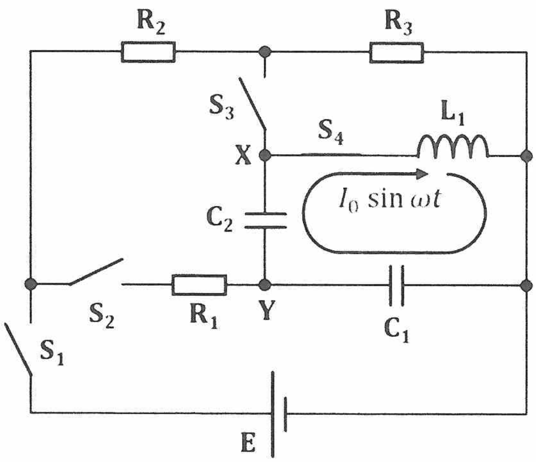

図4

第3問

次の文章中の空欄 **ア〜ク** に入る最も適切な数式を答えよ。また，**キ**については，導出過程も記せ。

図5のように，内側の断面積が S のシリンダーとなめらかに動くピストンで構成された断熱容器の中に，N 個の質量 m の単原子分子からなる理想気体が入っている。ピストンの移動方向に x 軸，それと垂直方向にy軸，z軸をとる。シリンダーの底の位置を $x = 0$，ピストンの位置を $x = L$ とする。単原子分子は他の単原子分子とは衝突せず，容器の壁に衝突するまでは等速直線運動をしていると仮定する。単原子分子と壁の衝突は弾性衝突とする。

衝突直前の単原子分子の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とすると，ピストンに衝突するひとつの単原子分子がピストンに与える力積の大きさは[**ア**]$\{v_x, v_y, v_z, m\}$ となる。単原子分子が 1 秒間にピストンと衝突する回数は $c =$[**イ**]$\{v_x, v_y, v_z, L\}$ である。単原子分子全体の ${v_x}^2$ の平均を $\overline{{v_x}^2}$ とすると，1 秒間に容器内の全ての単原子分子がピストンに与える力積の大きさは[**ウ**]$\{\overline{{v_x}^2}, m, L, N\}$ となる。容器内の単原子分子は，どの方向についても同様に運動しているため，$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$ の平均値は $\overline{v^2} = 3\overline{{v_x}^2}$ となる。気体の圧力 p はピストンの単位面積にはたらく平均の力であるから，$p =$ [**エ**]$\{\overline{v^2}, m, L, S, N\}$ となる。n モルの理想気体の絶対温度 T における状態方程式 $pV = nRT$ と比較すると，容器内の単原子分子すべての運動エネルギーの総和は[**オ**]$\{N, N_\mathrm{A}, R, T\}$ となる。ここで，R は気体定数であり，アボガドロ定数を N_A とする。

次に，ピストンが単原子分子の速さよりも十分に遅い一定の速度 $\vec{u} = (-u, 0, 0)$ で短い時間 Δt の間だけ動く場合を考える。ここで $u > 0$ とする。速度が $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ である単原子分子が，動くピストンに衝突した直後の速度は $\vec{v}' =$ [**カ**]$\{v_x, v_y, v_z, u\}$ となる。ピストンが移動しはじめてから Δt の間に単原子分子がピストンに衝突する回数を $c\,\Delta t$ で近似し，$|x| \ll 1$ で成立する近似式 $(1 + x)^2 \fallingdotseq 1 + 2x$ を用いると，Δt の間のひとつの単原子分子の運動エネルギーの増加量は[**キ**] $\{v_x, v_y, v_z, u, m, L, \Delta t\}$ となる。また，容器内部の体積は時間 Δt の間に $V = SL$ から $V - \Delta V$ に変化する。ΔV は V と比べて十分小さいため，気体の圧力 p は[**エ**]と等しく，また $\overline{v^2} = 3\overline{{v_x}^2}$ とみなしてよい。このとき，Δt の間の単原子分子全体の運動エネルギーの増加量は p を用いて[**ク**]$\{p, V, \Delta V\}$ となる。

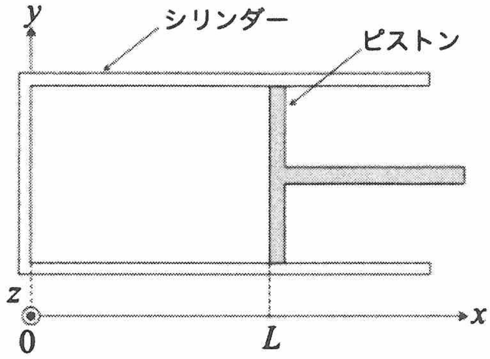

図 5

第4問

図6に示すように，最初に音源と観測者がそれぞれ点 A と点 P で静止している。その後，観測者が点 P から点 O まで OP 上を速さ v_O で移動した後に点 O で静止する。このとき，OA と OP は直交し，OA の距離を r，OP の距離を $2r$ とする。また，点 O からの距離が r となる OP 上の点を Q とするとき，次の問い（**問1〜7**）に答えよ。ただし，音の速さを V，音源の振動数を f とし，v_O は V より十分小さいとする。

問1　点 Q で観測者の聞く音の高さは，観測者が最初に点 P で静止していたときと比べてどのように変化するか，次の①〜④から選び，番号で答えよ。

① 変化しない　② 高くなる　③ 低くなる　④ 高くなったり低くなったりする

問2　観測者の点 Q を通過するときの速度について，観測者と音源を結ぶ方向の成分の大きさを求めよ。$\{ V, f, v_O \}$

問3　点 Q で観測者の聞く音の振動数を求めよ。$\{ V, f, v_O \}$

次に，図7に示すように，観測者が点 O で静止後，音源が点 O を中心に時計回りに速さ v_S で等速円運動を始めた。ここで，等速円運動の半径を r とし，v_S は V より十分小さいとする。

問4　点 O で静止している観測者の聞く音の高さは，音源が等速円運動を始める前に点 A で静止していたときと比べてどのように変化するか，次の①〜④から選び，番号で答えよ。

① 変化しない　② 高くなる　③ 低くなる　④ 高くなったり低くなったりする

続いて，音源が等速円運動をした状態で，観測者が点 O から点 P まで OP 上を速さ v_O で移動し，その後，点 P で静止する。

問5　点 A を通過するときに音源が発した音を観測者が点 Q で聞くとき，観測者の聞く音の振動数を求めよ。$\{ V, f, v_O, v_S \}$

点 P で静止している観測者の聞く音の振動数を測定すると，最大値 f_{max} は 765 Hz で，最小値 f_{min} は 680 Hz であった。ここで，等速円運動の半径 r を 12 m とし，音の速さ V を 340 m/s とする。

問6　観測者の聞く音の振動数の時間変化について，そのグラフの概形として最も適切なものを図8の(ア)～(カ)から選び，記号で答えよ。ただし，音源の点 A の通過時刻を 0 s とし，等速円運動の回転周期を T [s]とする。

問7　音源の振動数 f [Hz]と，音源の動く速さ v_S [m/s]を求めよ。

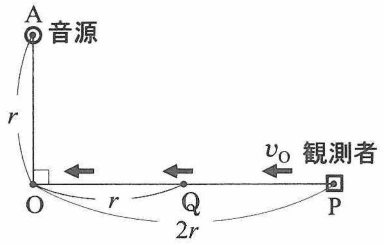

図6

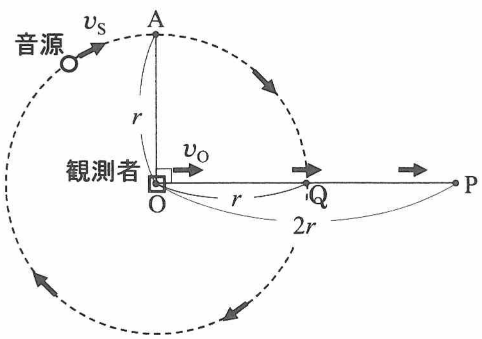

図7

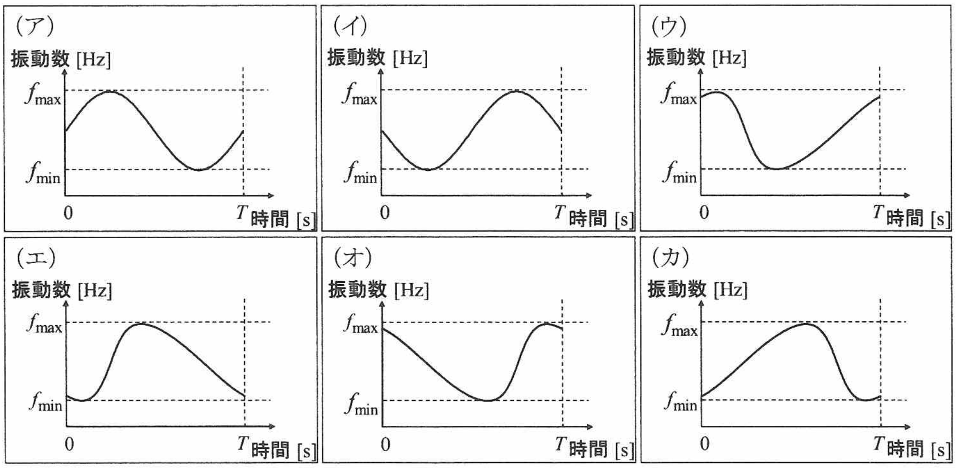

図8