[1]

(1)　△ABCで余弦定理より

$$2^2=1^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$ …[答]

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\angle\mathrm{BAC}$

$$=1\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$ …[答]

(3)　点Pは辺BC上より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad (\text{ただし，} 0\leqq s\leqq 1)$$

とおける。よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=3\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(2-3s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(3s-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=k$ とおくと

$$\begin{aligned}k^2&=\left|(2-3s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(3s-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=(2-3s)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2(2-3s)(3s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(3s-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=(2-3s)^2\cdot1+2(2-3s)(3s-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(3s-1)^2\cdot2\\&=36s^2-33s+8\\&=36\left(s-\frac{11}{24}\right)^2+\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$0\leqq s\leqq 1$ より

$s=\dfrac{11}{24}$ のとき k^2 の最小値は $\dfrac{7}{16}$ となる

したがって

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　$a=1$ のとき，C_2 は　$x^2+y^2-4x-2y-15=0$

C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線は

$2x+y+3=0$

求める共有点は，C_1 と直線の交点であるから

$x^2+(-2x-3)^2=9 \iff 5x^2+12x=0$

ゆえに，$x=0,\ -\dfrac{12}{5}$

よって，2 交点の座標は $(0,\ -3)$，$\left(-\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$ …[答]

(2)　求める円の方程式は，実数 k を用いて

$k(x^2+y^2-9)+x^2+y^2-4x-2y-15=0\ (k \neq -1)$

で表され，点 $(-1,\ 6)$ を通ることにより

$28k+14=0$

ゆえに，$k=-\dfrac{1}{2}$

このとき，円の方程式は

$x^2+y^2-8x-4y-21=0$ …[答]

(3)　C_1 は中心 $(0,\ 0)$，半径 3 であり，C_2 は中心 $(2a,\ a)$，半径 $\sqrt{5a^2+2a+13}$ の円である。また，中心間の距離は $\sqrt{5a^2}$ である。

C_1 と C_2 が接するとき，共有点がちょうど 1 つになるので，求める条件は，C_1 と C_2 が内接するとき

$\left|\sqrt{5a^2+2a+13}-3\right|=\sqrt{5a^2}$

C_1 と C_2 が外接するとき

$\sqrt{5a^2+2a+13}+3=\sqrt{5a^2}$

まとめて整理すると

$$5a^2+2a+13\pm6\sqrt{5a^2+2a+13}+9=5a^2$$

$$\iff \pm3\sqrt{5a^2+2a+13}=-a-11$$

よって，$9(5a^2+2a+13)=a^2+22a+121$

$\iff 11a^2-a-1=0$

よって，求める a の値は，$a=\dfrac{1\pm3\sqrt{5}}{22}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1) $\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　　$\therefore\ a_2=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$　　$\therefore a_3=\dfrac{4}{7}$

$\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{15}{8}$　　$\therefore a_4=\dfrac{8}{15}$　　[答]

(2) $c_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくと　$c_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

$$c_{n+1}=c_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n\geqq 2$ のとき

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots①$$

①で $n=1$ とすると，$c_1=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$ となるから①は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$c_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}$　　[答]

(3) (2)より

$b_n=\dfrac{3a_n+2}{a_n}=3+\dfrac{2}{a_n}=3+2\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=3+4-\dfrac{1}{2^{n-2}}=7-\dfrac{1}{2^{n-2}}$ [答]

(4) $\mathrm{P}_n(b_n,\ b_{n+1})$とおく

$\mathrm{P}_1(b_1,\ b_2)=(5,\ 6)$

$\mathrm{P}_2(b_2,\ b_3)=\left(6,\ \dfrac{13}{2}\right)$

直線 P_1P_2 の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

$P_n(b_n,\ b_{n+1})=P_n\left(7-\dfrac{1}{2^{n-2}},\ 7-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ で

いま $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(7-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)+\dfrac{7}{2}$

$=7-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成立するので，点 P_n は直線 P_1P_2 上にある。

よって，すべての点 $P_n(b_n,\ b_{n+1})$ は一直線 $\left(y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)$ 上にある。

[証明終]

高松高等予備校

[4]

(1) $f(2e)=\log 2e$

$\quad\quad =\log 2+1$

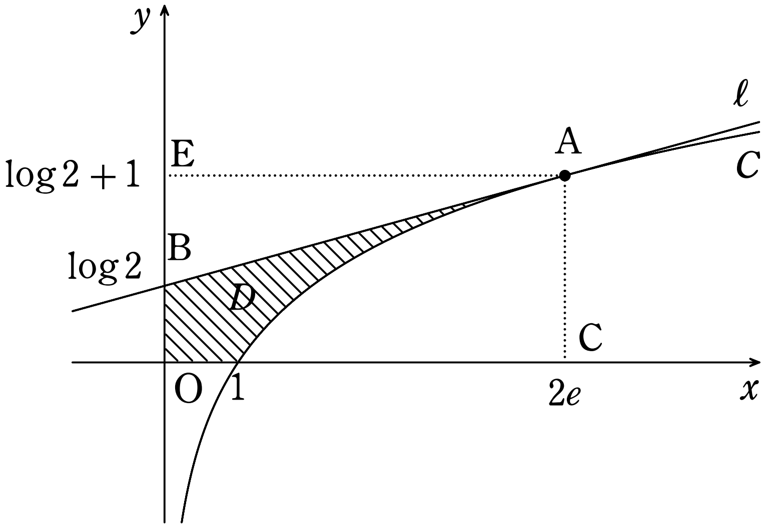
$f(x)=\log x$ より $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

したがって，接線 l の方程式は

$$y-(\log 2+1)=\frac{1}{2e}(x-2e)$$

$$y=\frac{1}{2e}x+\log 2$$ …[答]

(2)



接線 l の y 切片 $\log 2$ は正より，図形 D は図の斜線部分

ここで，A$(2e, \log 2+1)$，B$(0, \log 2)$，C$(2e, 0)$，E$(0, \log 2+1)$

とおくと，求める面積は

$$(\text{台形OBAC})-\int_1^{2e}\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(\log 2+\log 2+1)\cdot 2e-\Big[x\log x-x\Big]_1^{2e}$$

$$=2e\log 2+e-\{(2e\log 2e-2e)-(\log 1-1)\}$$

$$=2e\log 2+e-(2e\log 2+1)$$

$$=e-1$$ …[答]

(3) $y=\log x$ より $x=e^y$ であり，(2)の図から

半径EA，高さEBの円すいの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot(2e)^2\pi\cdot\{(\log 2+1)-\log 2\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi e^2$$

したがって，求める体積は

$$\int_0^{\log 2+1} \pi (e^y)^2\, dy - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^{\log 2+1} - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2\log 2+2} - \frac{1}{2} e^0 \right) - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{\log 4} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$= \pi \left(2e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$= \left(\frac{2}{3} e^2 - \frac{1}{2} \right)\pi$$

…[答]

高松高等予備校