

[1]

(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$2^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos \angle BAC$$

$$\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots[\text{答}]$$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC$

$$= 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \dots[\text{答}]$$

(3) 点Pは辺BC上より

$$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad (\text{ただし, } 0 \leq s \leq 1)$$

とおける。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \\ &= 3\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= (2-3s)\overrightarrow{AB} + (3s-1)\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

ここで, $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = k$ とおくと

$$\begin{aligned} k^2 &= |(2-3s)\overrightarrow{AB} + (3s-1)\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= (2-3s)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2(2-3s)(3s-1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (3s-1)^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= (2-3s)^2 \cdot 1 + 2(2-3s)(3s-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (3s-1)^2 \cdot 2 \\ &= 36s^2 - 33s + 8 \\ &= 36\left(s - \frac{11}{24}\right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$0 \leq s \leq 1$ より

$s = \frac{11}{24}$ のとき k^2 の最小値は $\frac{7}{16}$ となる

したがって

$$|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| \text{ の最小値は } \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校

[2]

- (1) $a=1$ のとき, C_2 は $x^2+y^2-4x-2y-15=0$

C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線は

$$2x+y+3=0$$

求める共有点は, C_1 と直線の交点であるから

$$x^2+(-2x-3)^2=9 \Leftrightarrow 5x^2+12x=0$$

$$\text{ゆえに, } x=0, -\frac{12}{5}$$

$$\text{よって, 2 交点の座標は } (0, -3), \left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right) \quad \dots[\text{答}]$$

- (2) 求める円の方程式は, 実数 k を用いて

$$k(x^2+y^2-9)+x^2+y^2-4x-2y-15=0 \quad (k \neq -1)$$

で表され, 点 $(-1, 6)$ を通ることにより

$$28k+14=0$$

$$\text{ゆえに, } k=-\frac{1}{2}$$

このとき, 円の方程式は

$$x^2+y^2-8x-4y-21=0 \quad \dots[\text{答}]$$

- (3) C_1 は中心 $(0, 0)$, 半径 3 であり, C_2 は中心 $(2a, a)$, 半径

$\sqrt{5a^2+2a+13}$ の円である。また, 中心間の距離は $\sqrt{5a^2}$ である。

C_1 と C_2 が接するとき, 共有点がちょうど 1 つになるので, 求める条件は, C_1 と C_2 が内接するとき

$$|\sqrt{5a^2+2a+13}-3|=\sqrt{5a^2}$$

C_1 と C_2 が外接するとき

$$\sqrt{5a^2+2a+13}+3=\sqrt{5a^2}$$

まとめて整理すると

$$5a^2+2a+13 \pm 6\sqrt{5a^2+2a+13}+9=5a^2$$

$$\Leftrightarrow \pm 3\sqrt{5a^2+2a+13}=-a-11$$

$$\text{よって, } 9(5a^2+2a+13)=a^2+22a+121$$

$$\Leftrightarrow 11a^2-a-1=0$$

$$\text{よって, 求める } a \text{ の値は, } a=\frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{22} \quad \dots[\text{答}]$$

[3]

$$(1) \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore a_2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad \therefore a_3 = \frac{4}{7}$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \quad \therefore a_4 = \frac{8}{15}$$

[答]

$$(2) \quad c_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおくと } c_1 = \frac{1}{a_1} = 1$$

$$c_{n+1} = c_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①で $n=1$ とすると, $c_1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ となるから ①は $n=1$ のときも成り立つ。

$$\text{したがって } c_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{c_n} = \frac{1}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \quad [\text{答}]$$

(3) (2)より

$$b_n = \frac{3a_n + 2}{a_n} = 3 + \frac{2}{a_n} = 3 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 3 + 4 - \frac{1}{2^{n-2}} = 7 - \frac{1}{2^{n-2}} \quad [\text{答}]$$

(4) $P_n(b_n, b_{n+1})$ とおく

$$P_1(b_1, b_2) = (5, 6)$$

$$P_2(b_2, b_3) = \left(6, \frac{13}{2}\right)$$

直線 P_1P_2 の方程式は $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

$$P_n(b_n, b_{n+1}) = P_n\left(7 - \frac{1}{2^{n-2}}, 7 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{で}$$

$$\text{いま } \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(7 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \frac{7}{2}$$

$$= 7 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ が成立するので, 点 } P_n \text{ は直線 } P_1P_2 \text{ 上にある。}$$

よって, すべての点 $P_n(b_n, b_{n+1})$ は一直線 $\left(y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\right)$ 上にある。

[証明終]

高松高等予備校

[4]

$$f(x) = -x^3 + x, \quad g(x) = x^2 - a \text{ とおく}$$

(1) 点Pを $(t, f(t))$ とおくと

$$f(t) = g(t) \text{ より}$$

$$-t^3 + t = t^2 - a \text{ から } a = t^3 + t^2 - t$$

$$f'(t) = g'(t) \text{ より}$$

$$-3t^2 + 1 = 2t \text{ から}$$

$$(t+1)(3t-1) = 0$$

$$t = -1, \frac{1}{3}$$

$$t = -1 \text{ のとき } a = 1$$

$$t = \frac{1}{3} \text{ のとき } a = -\frac{5}{27}$$

$$a > 0 \text{ より } a = 1$$

...[答]

(2) $g'(x) = 2x$ より共通接線 ℓ の方程式は $y = -2(x+1) = -2x-2$

ℓ と C_1 の共有点の x 座標は

$$-x^3 + x = -2x - 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$x = -1, 2$$

点Aは点Pと異なるので $x = 2$

$$\text{よって } A(2, -6)$$

...[答]

(3) C_2 上の点 (s, s^2-1) における接線の方程式は

$$y - (s^2 - 1) = 2s(x - s)$$

$$y = 2sx - s^2 - 1$$

この接線が点A $(2, -6)$ を通るとき

$$-6 = 4s - s^2 - 1$$

$$s^2 - 4s - 5 = 0$$

$$(s+1)(s-5) = 0$$

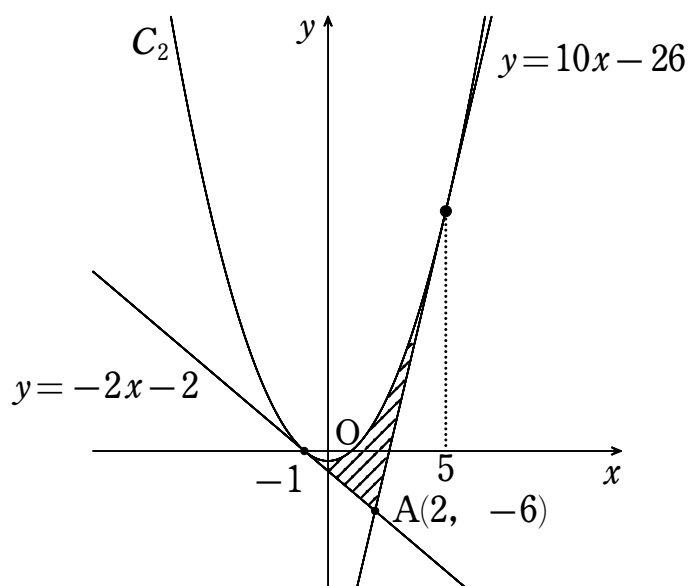
$$s = -1, 5$$

求める接線は ℓ と異なるので $s = 5$ より

$$y = 10x - 26$$

...[答]

(4)



求める図形は図の斜線部分である。

図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{x^2 - 1 - (-2x - 2)\} dx + \int_2^5 \{x^2 - 1 - (10x - 26)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx + \int_2^5 (x-5)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{3}(x-5)^3 \right]_2^5 \\ &= 18 \end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[5]

$$(1) \quad f(2e) = \log 2e \\ = \log 2 + 1$$

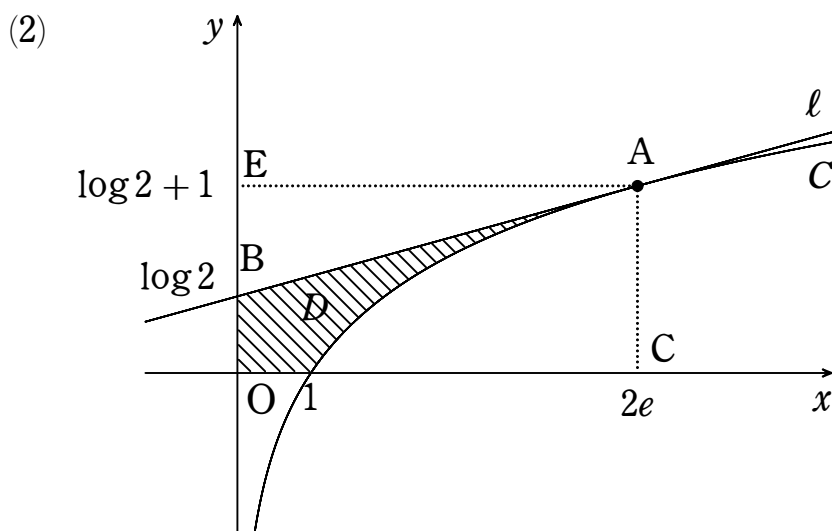
$$f(x) = \log x \text{ より } f'(x) = \frac{1}{x}$$

したがって、接線 l の方程式は

$$y - (\log 2 + 1) = \frac{1}{2e}(x - 2e)$$

$$y = \frac{1}{2e}x + \log 2$$

…[答]



接線 l の y 切片 $\log 2$ は正より、図形 D は図の斜線部分

ここで、 $A(2e, \log 2 + 1)$, $B(0, \log 2)$, $C(2e, 0)$, $E(0, \log 2 + 1)$

とおくと、求める面積は

$$\begin{aligned} & (\text{台形OBAC}) - \int_1^{2e} \log x \, dx \\ &= \frac{1}{2}(\log 2 + \log 2 + 1) \cdot 2e - \left[x \log x - x \right]_1^{2e} \\ &= 2e \log 2 + e - \{(2e \log 2e - 2e) - (\log 1 - 1)\} \\ &= 2e \log 2 + e - (2e \log 2 + 1) \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

…[答]

(3) $y = \log x$ より $x = e^y$ であり、(2)の図から
半径EA、高さEBの円すいの体積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot (2e)^2 \pi \cdot \{(\log 2 + 1) - \log 2\} \\ &= \frac{4}{3} \pi e^2 \end{aligned}$$

したがって、求める体積は

$$\begin{aligned}& \int_0^{\log 2 + 1} \pi(e^y)^2 dy - \frac{4}{3}\pi e^2 \\&= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^{\log 2 + 1} - \frac{4}{3}\pi e^2 \\&= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2\log 2 + 2} - \frac{1}{2} e^0 \right) - \frac{4}{3}\pi e^2 \\&= \pi \left(\frac{1}{2} e^{\log 4} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{4}{3}\pi e^2 \\&= \pi \left(2e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{4}{3}\pi e^2 \\&= \left(\frac{2}{3} e^2 - \frac{1}{2} \right) \pi\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校