[1]

(1)　$C: y=x^3$ 上の点P$(t,\ t^3)$の接線 ℓ_1 の方程式は $y'=3x^2$より

$y-t^3=3t^2(x-t)$

よって　$y=3t^2x-2t^3$　…[答]

(2)　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき ℓ_1 の傾き $3t^2$ について $0 \leqq 3t^2<1$

ℓ_1 が x 軸の正の方向とのなす角を θ_0 とすると $0° \leqq \theta_0<45°$

よって ℓ_2が x 軸の正の方向とのなす角を θ とすると $\theta=\theta_0+45°$

だから $45° \leqq \theta<90°$

従って ℓ_2 の傾きは $\tan(\theta_0+45°)=\dfrac{\tan\theta_0+1}{1-\tan\theta_0\cdot 1}$

ここで $\tan\theta_0=3t^2$だから $\tan(\theta_0+45°)=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}$

よって ℓ_2 の方程式は $y-t^3=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)$

つまり $y=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}x-\dfrac{t+2t^3+3t^5}{1-3t^2}$　…[答]

(3)　C と ℓ_2から yを消去して

$$x^3-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}x+\frac{t+2t^3+3t^5}{1-3t^2}=0$$

分母を払って整理すると

$(x-t)\{(1-3t^2)x^2+t(1-3t^2)x-(1+2t^2+3t^4)\}=0$

点P以外の共有点があるとすればその x 座標は

$(1-3t^2)x^2+t(1-3t^2)x-(1+2t^2+3t^4)=0$　…(*)

で得られる

(*)の判別式を D とすれば $1-3t^2>0$，$1+2t^2+3t^4>0$ に注意すると

$D=t^2(1-3t^2)^2+4(1-3t^2)(1+2t^2+3t^4)>0$

よって(*)は異なる2つの実数解をもつ

ここで(*)で $x=t$ とすると (左辺)$=-1-9t^4 \fallingdotseq 0$

従って(*)は t 以外の異なる2つの実数解をもつ

即ち，C と ℓ_2 は異なる3点で交わる　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　t が実数全体を動くとき，直線 ℓ が点 (X, Y) を通過するとすると

$$Y=-(t+1)X+t^2+2t+4$$

$$t^2-(X-2)t+(-X-Y+4)=0 \cdots ①$$

この t についての 2 次方程式が実数解をもつので，

判別式を D とすると

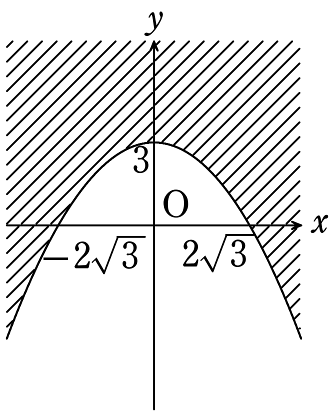
$$D \geqq 0$$

$$(X-2)^2-4(-X-Y+4) \geqq 0$$

$$Y \geqq -\frac{1}{4}X^2+3=-\frac{1}{4}(X-2\sqrt{3})(X+2\sqrt{3})$$

よって，t が実数全体を動くときの直線 ℓ の通過領域は

図の斜線部分（ただし，境界線を含む）



…[答]

(2)　$f(t)=t^2-(X-2)t+(-X-Y+4)$ とおくと，放物線 $y=f(t)$ は下に凸で，軸が

$$t=\frac{X-2}{2}$$

となり，

$$f(-1)=-Y+3\,,\quad f(1)=-2X-Y+7$$

ここで，t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 ℓ が点 (X, Y) を通過するとすると，t についての 2 次方程式 ① が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもち，以下の 2 つの場合がある

i)　$f(-1) \cdot f(1) > 0$ の場合

　条件を満たすとき

$$\begin{cases} f(-1)>0 \text{ かつ } f(1)>0 \\ -1<\dfrac{X-2}{2}<1 \\ D\geqq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y<3 \text{ かつ } Y<-2X+7 \text{ かつ } 0<X<4 \text{ かつ } Y\geqq -\frac{1}{4}X^2+3$$

ii)　$f(-1)\cdot f(1)\leqq 0$ の場合

条件を満たすので

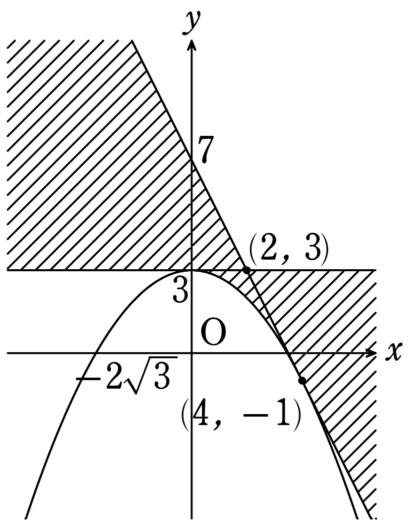
$(Y\leqq 3$ かつ $Y\geqq -2X+7)$ または $(Y\geqq 3$ かつ $Y\leqq -2X+7)$

ここで，

$$\begin{cases} Y=-\dfrac{1}{4}X^2+3 \\ Y=-2X+7 \end{cases} \Leftrightarrow (X, Y)=(4, -1)$$

$$\begin{cases} Y=3 \\ Y=-2X+7 \end{cases} \Leftrightarrow (X, Y)=(2, 3)$$

i) ii) より，t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときの直線 ℓ の通過領域は図の斜線部分（ただし，境界線を含む）



…[答]

高松高等予備校

[3]

(1) $\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ a_2=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$ $\quad\therefore\ a_3=\dfrac{4}{7}$

$\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{15}{8}$ $\quad\therefore\ a_4=\dfrac{8}{15}$ [答]

(2) $c_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $\quad c_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

$$c_{n+1}=c_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n\geqq2$ のとき

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots①$$

①で $n=1$ とすると， $c_1=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$ となるから ①は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $\quad c_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $\quad a_n=\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}$ [答]

(3) (2)より

$b_n=\dfrac{3a_n+2}{a_n}=3+\dfrac{2}{a_n}=3+2\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=3+4-\dfrac{1}{2^{n-2}}=7-\dfrac{1}{2^{n-2}}$ [答]

(4) $\mathrm{P}_n(b_n,\ b_{n+1})$とおく

$\mathrm{P}_1(b_1,\ b_2)=(5,\ 6)$

$\mathrm{P}_2(b_2,\ b_3)=\left(6,\ \dfrac{13}{2}\right)$

直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

$\mathrm{P}_n(b_n,\ b_{n+1})=\mathrm{P}_n\left(7-\dfrac{1}{2^{n-2}},\ 7-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ で

いま　$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(7-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)+\dfrac{7}{2}$

$=7-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成立するので，点 P_n は直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上にある。

よって，すべての点 $\mathrm{P}_n(b_n,\ b_{n+1})$ は一直線 $\left(y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)$ 上にある。

[証明終]

高松高等予備校

[4]

$$F(x)=\int_0^{x^2}(\sin t)^n dt \qquad (n \text{ は自然数})$$

(1)　$F'(x)=(\sin x^2)^n\cdot 2x=2x(\sin x^2)^n$　…[答]

(2)　n が偶数のとき，$(\sin x^2)^n \geqq 0$ より

$F'(x)$ の符号が変化するのは，$x=0$ のとき負から正に変わるのみである。

よって，$-\pi\leqq x\leqq \pi$ おける極小値は $F(0)=0$

極大値はなし　…[答]

(3)　$n=5$ のとき，$F(x)=\int_0^{x^2}(\sin t)^5 dt$，$F'(x)=2x(\sin x^2)^5$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq x^2\leqq \pi^2$

$F'(x)=0$になるのは，$x=0$ または $\sin x^2=0$

$3<\pi<4$ に注意すると $x^2=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

$x=0,\ \pm\sqrt{\pi},\ \pm\sqrt{2\pi},\ \pm\sqrt{3\pi}$

ここで，$F(-x)=\int_0^{(-x)^2}(\sin t)^n dt=\int_0^{x^2}(\sin t)^n dt=F(x)$ より $F(x)$ は偶関数になるので，グラフはy軸に関して対称である。

そこで，$0\leqq x\leqq\pi$における増減を調べると，

x	0		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt{2\pi}$		$\sqrt{3\pi}$		π
$F'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗		↘		↗		↘	

$$\int\sin^5 t\,dt=\int\sin^4 t\sin t\,dt=\int(1-\cos^2 t)^2\sin t\,dt$$

$\cos t=u$ とすると，$-\sin t\,dt=du$　$\sin t\,dt=-du$

$$=\int(1-u^2)^2(-du)=\int(-u^4+2u^2-1)du$$

$$=-\frac{1}{5}u^5+\frac{2}{3}u^3-u+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

$$=-\frac{1}{5}\cos^5 t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t+C$$

$F(0)=0$，$F(\pm\sqrt{\pi})=\left[-\frac{1}{5}\cos^5 t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t\right]_0^{\pi}$

$$=-\frac{1}{5}(-1-1)+\frac{2}{3}(-1-1)-(-1-1)=\frac{16}{15}$$

$$F(\pm\sqrt{2\pi})=\left[-\frac{1}{5}\cos^5 t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t\right]_0^{2\pi}=0$$

$$F(\pm\sqrt{3\pi})=\left[-\frac{1}{5}\cos^5 t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t\right]_0^{3\pi}=\frac{16}{15}$$

したがって， $x=0$，$\pm\sqrt{2\pi}$ のとき，極小値 0

$x=\pm\sqrt{\pi}$，$\pm\sqrt{3\pi}$ のとき，極大値 $\dfrac{16}{15}$ をとる。　…[答]

高松高等予備校