

1

$$(1) \quad 3x + 11y = 1 = 12 - 11 = 3 \cdot 4 + 11 \cdot (-1)$$

だから、 $x=4$ 、 $y=-1$ は与式をみたす。

$$\text{よって、} (x, y) = (4, -1)$$

…[答]

$$(2) \quad 3x + 11y = 1000 = 3 \cdot 4000 + 11 \cdot (-1000) \text{ だから}$$

$$3(x - 4000) = 11(-y - 1000)$$

3 と 11 は互いに素だから、 k を整数として

$$\begin{cases} x - 4000 = 11k \\ -y - 1000 = 3k \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} x = 11k + 4000 \\ y = -3k - 1000 \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

…[答]

$$(3) \quad P = |x - y| \text{ とすると、} P = |14k + 5000| \text{ で}$$

$$\alpha = -\frac{5000}{14} = -357.1\ldots$$

とすると、 k P 平面でのグラフは右図

よって $k = -357$ のとき P は最小となる

つまり

$$x = 11 \cdot (-357) + 4000 = 73$$

$$y = -3 \cdot (-357) - 1000 = 71$$

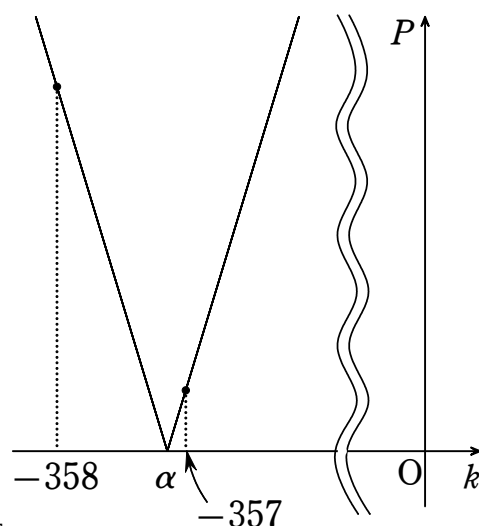
$$P = |x - y| = 2$$

したがって

$$(x, y) = (73, 71) \text{ のとき}$$

最小値 2

…[答]



2

(1) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ より

$$f(\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta + x\sin \theta - y - 1$$

$$= -2\sin^2 \theta + x\sin \theta - y$$

$\sin \theta = t$ とし, $f(\theta) = g(t)$ とする

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $-1 \leq t \leq 1$

$$g(t) = -2t^2 + xt - y$$

$$= -2\left(t^2 - \frac{x}{2}t\right) - y$$

$$= -2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}x^2 - y$$

軸 $t = \frac{x}{4}$ であるから

(i) $\frac{x}{4} < -1$ すなわち $x < -4$ のとき

$t = -1$ で最大値 $-x - y - 2$

(ii) $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ すなわち $-4 \leq x \leq 4$ のとき

$t = \frac{x}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}x^2 - y$

(iii) $1 < \frac{x}{4}$ すなわち $4 < x$ のとき

$t = 1$ で最大値 $x - y - 2$

したがって, $f(\theta)$ の最大値は

$$\begin{cases} -x - y - 2 & (x < -4) \\ \frac{1}{8}x^2 - y & (-4 \leq x \leq 4) \\ x - y - 2 & (4 < x) \end{cases}$$

...[答]

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について不等式 $f(\theta) < 0$ が成り立つとき, $-1 \leq t \leq 1$ であるすべての t について, $g(t)$ の最大値が負であればよい

$x < -4$ のとき

$$-x - y - 2 < 0 \text{ から } y > -x - 2$$

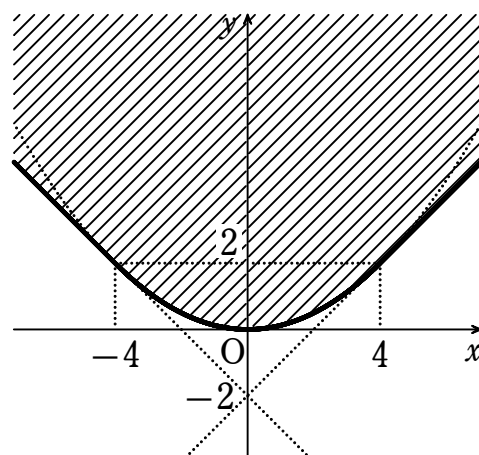
$-4 \leq x \leq 4$ のとき

$$\frac{1}{8}x^2 - y < 0 \text{ より } y > \frac{1}{8}x^2$$

$x > 4$ のとき

$$x - y - 2 < 0 \text{ より } y > x - 2$$

よって求める領域は右図斜線部
ただし境界線を含まない



…[答]

高松高等予備校

3

- (1) $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号が成り立つのは $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$

したがって、 t は $x = 0$ で、最小値 2 をとる。 …[答]

- (2) $y = 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1}) - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1})$

$$= 16^x + 16^{-x} + (2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x}) - 125\left(\frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{-x}\right)$$

$$\text{ここで } 16^x + 16^{-x} = 2^{4x} + 2^{-4x} = (2^{2x})^2 + (2^{-2x})^2$$

$$= \{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\}^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

$$\text{よって } y = t^4 - 4t^2 + 2 + (2t)^2 - \frac{125}{2}t$$

$$= t^4 - \frac{125}{2}t + 2 \quad \dots[\text{答}]$$

- (3) $y' = 4t^3 - \frac{125}{2}$

$$y' = 0 \text{ とすると } 4t^3 - \frac{125}{2} = 0 \text{ から } t^3 = \frac{125}{8}, \quad t \text{ は実数だから } t = \frac{5}{2}$$

$t \geq 2$ だから

t	2	...	$\frac{5}{2}$	...
y'		-	0	+
y		$\searrow$		$\nearrow$

y は $t = \frac{5}{2}$ で最小となる。

$$\text{このとき } 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

両辺に $2 \cdot 2^x$ をかけて、整理すると

$$2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x - 2)(2 \cdot 2^x - 1) = 0$$

$$2^x = 2, \quad \frac{1}{2}$$

よって $x = \pm 1$

…[答]

高松高等予備校

4

- (1) 平面 $x=k$ と辺 OA , AB , AC の交点を P , Q , R とする

平面 $PQR \parallel$ 平面 OBC なので

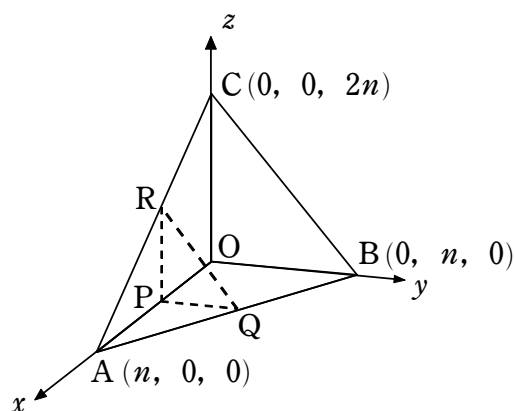
$$\frac{AP}{PO} = \frac{AQ}{QB} = \frac{AR}{RC} = \frac{n-k}{k}$$

よって、三角形 T_k の3つの頂点

P , Q , R の座標は

$$P(k, 0, 0), Q(k, n-k, 0),$$

$$R(k, 0, 2n-2k)$$



...[答]

- (2) 平面 $x=k$ との断面を考えると、三角形 T_k の内部は連立不等式

$$\begin{cases} 2y+z < 2n-2k \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \text{で表せる}$$

$y=l$ ($1 \leq l \leq n-k-1$) とすると、

領域内の z は

$$1 \leq z < 2n-2k-2l \quad \text{なので}$$

整数 z の個数は $(2n-2k-2l-1)$ 個である

したがって、求める個数 S は

$$S = \sum_{l=1}^{n-k-1} \{(2n-2k-1)-2l\}$$

$$= (2n-2k-1)(n-k-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}(n-k-1)(n-k)$$

$$= (n-k-1)(2n-2k-1-n+k)$$

$$= (n-k-1)^2$$

...[答]

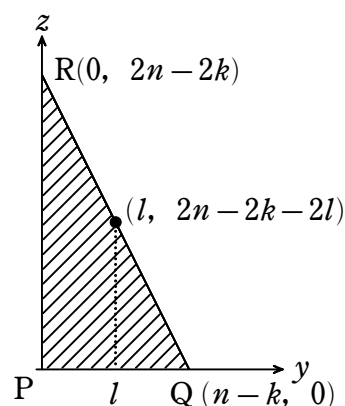
- (3) 求める個数 (V) は、(2)において $k=1, 2, \dots, (n-1)$ としたものとの総和だから

$$V = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k-1)^2 = (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1^2 + 0^2$$

$$= \sum_{m=1}^{n-2} m^2$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3)$$

...[答]



高松高等予備校