数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C）

$\boxed{1}$

(1)　$3x+11y=1=12-11=3\cdot 4+11\cdot(-1)$

だから，　$x=4$，$y=-1$ は与式をみたす。

よって，$(x,\ y)=(4,\ -1)$　　…[答]

(2)　$3x+11y=1000=3\cdot 4000+11\cdot(-1000)$ だから

$$3(x-4000)=11(-y-1000)$$

3 と 11 は互いに素だから，k を整数として

$$\begin{cases} x-4000=11k \\ -y-1000=3k \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} x=11k+4000 \\ y=-3k-1000 \end{cases} (k\text{は整数})$$　　…[答]

(3)　x，y が自然数のとき

$$\begin{cases} x=11k+4000>0 \\ y=-3k-1000>0 \end{cases}$$

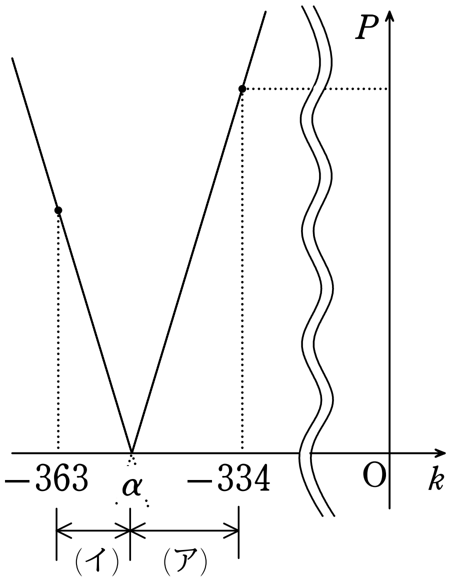
ゆえに，　$-\dfrac{4000}{11}<k<-\dfrac{1000}{3}$ $(-363.6<k<-333.3\cdots)$

よって，　$-363\leqq k\leqq -334$

ここで $P=|x-y|$ とすると，　$P=|14k+5000|$ で

$$\alpha=-\frac{5000}{14}=-357.1\cdots$$

とすると，kP 平面でのグラフは右図



(ア)$=-334-\alpha>-334-(-357)=23$

(イ)$=\alpha-(-336)<-357-(-336)=6$

だから　(ア)$>$(イ)

よって $k=-334$ のとき P は最大となる

つまり

$$x=11\cdot(-334)+4000=326$$

$$y=-3\cdot(-334)-1000=2$$

$$P=|x-y|=324$$

したがって

$(x,\ y)=(326,\ 2)$ のとき最大値　324　　…[答]

$\boxed{2}$

(1)　平面 $x=k$ と辺 OA，AB，AC の交点を P，Q，R とする

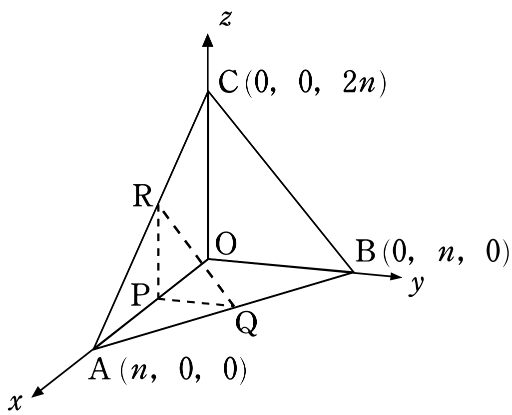
平面 PQR // 平面 OBC なので

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PO}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RC}}=\frac{n-k}{k}$$

よって，三角形 T_k の 3 つの頂点 P，Q，R の座標は

$\mathrm{P}(k,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(k,\ n-k,\ 0)$，

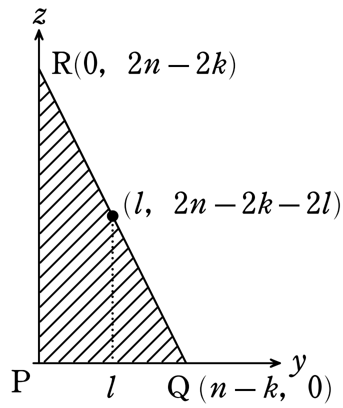
$\mathrm{R}(k,\ 0,\ 2n-2k)$



…[答]

(2)　平面 $x=k$ との断面を考えると，三角形 T_k の内部は連立不等式

$$\begin{cases} 2y+z<2n-2k \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$$ で表せる



$y=l\ (1\leqq l\leqq n-k-1)$ とすると，

領域内の z は

$1\leqq z<2n-2k-2l$　なので

整数 z の個数は $(2n-2k-2l-1)$ 個である

したがって，求める個数 S は

$$S=\sum_{l=1}^{n-k-1}\{(2n-2k-1)-2l\}$$

$$=(2n-2k-1)(n-k-1)-2\cdot\frac{1}{2}(n-k-1)(n-k)$$

$$=(n-k-1)(2n-2k-1-n+k)$$

$$=(n-k-1)^2$$

…[答]

(3)　求める個数 (V) は，(2) において $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ (n-1)$ としたものの総和だから

$$V=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=(n-2)^2+(n-3)^2+\cdots\cdots+1^2+0^2$$

$$=\sum_{m=1}^{n-2}m^2$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3)$$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　P$(a,\ b)$ は円 C 上の点より

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots①$$

ℓ_p 上の点を E$(x,\ y)$とすると

PE＝AEであるから PE^2＝AE^2

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x-4)^2+y^2$$

展開において①を利用して整理すると

$$(a-4)x+by+6=0$$ …[答]

(2)　$\overrightarrow{m}=(b,\ -a)$，$\overrightarrow{n}=(a-4,\ b)$ とおくと

直線OP⊥ $\overrightarrow{m}$，直線 $\ell_p \perp \overrightarrow{n}$ であるから

直線OP∥直線 ℓ_p のとき $\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$

このとき　$b^2+a(a-4)=0$

$$a^2+b^2-4a=0$$

$$4-4a=0$$

$$a=1$$

$$1+b^2=4,\ b^3=3,\ b=\pm\sqrt{3}$$

よってPの座標は　$(1,\ \sqrt{3})$ または $(1,\ -\sqrt{3})$ …[答]

(3)　交点Qを $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} bx-ay=0 & \cdots② \\ (a-4)x+by+6=0 \text{ より } ax+by=2(2x-3) & \cdots③ \end{cases}$$

②×b　$b^2x-aby=0$　…②′

③×a　$a^2x+aby=2a(2x-3)$　…③′

②′+③′　$(a^2+b^2)x=2a(2x-3)$

①より　$a(2x-3)=2x$

$x=\dfrac{3}{2}$ は解ではないから $x\fallingdotseq\dfrac{3}{2}$ より　$a=\dfrac{2x}{2x-3}$

②×a　$abx-a^2y=0$　…②″

③×b　$abx+b^2y=2b(2x-3)$　…③″

③″−②″　$(a^2+b^2)y=2b(2x-3)$

①より　$b(2x-3)=2y$　$b=\dfrac{2y}{2x-3}$

①より　$\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{2y}{2x-3}\right)^2=4$

$$\frac{x^2}{(2x-3)^2}+\frac{y^2}{(2x-3)^2}=1$$

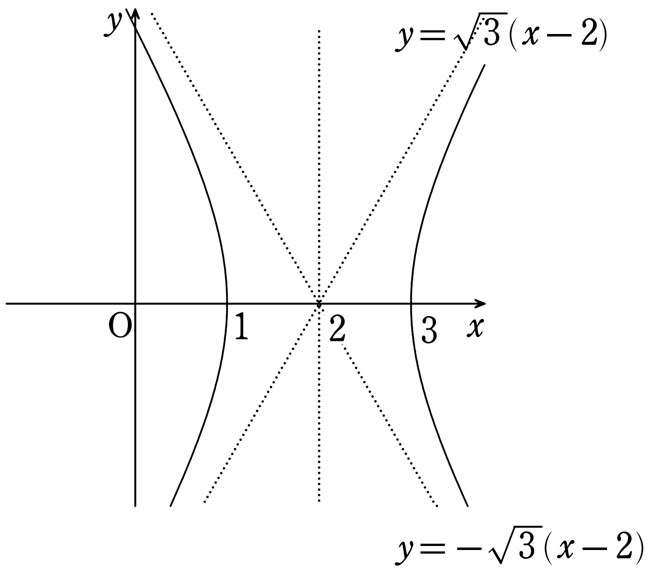
$$x^2+y^2=(2x-3)^2$$

展開して整理すると　$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

以上より求める点Q$(x,\ y)$の軌跡は

双曲線　$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　…[答]

図の実線部分



高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　A から BC に垂線を引きその交点を H とすると，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形なので

$$BH=CH=AB\cos\angle ABC=3\cos\theta$$

よって　$BC=2BH=6\cos\theta$

これにより，領域の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= (AB+AC+BC)\times 1+\pi\cdot 1^2 \\ &= (3+3+6\cos\theta)+\pi \\ &= 6(1+\cos\theta)+\pi \end{aligned}$$

…[答]

(2)　△ABCの面積を S_0 とすると

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin(180^\circ-2\theta) \\ &= \frac{9}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

…①

また，△ABC の面積を内接円の半径 $r(\theta)$ で表すと

$$\begin{aligned} S_\theta &= \frac{1}{2}(AB+AC+BC)\cdot r(\theta) \\ &= \frac{1}{2}(6+6\cos\theta)\cdot r(\theta) \\ &= 3(1+\cos\theta)\cdot r(\theta) \end{aligned}$$

…②

①，② より

$$3(1+\cos\theta)\cdot r(\theta)=\frac{9}{2}\sin 2\theta$$

$$r(\theta)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{1+\cos\theta}$$

…[答]

(3)　$r(\theta)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos\theta}$ より

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cos 2\theta(1+\cos\theta)+\sin 2\theta\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2} \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+2\sin^2\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} \\ &= 3\cdot\frac{(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} \\ &= 3\cdot\frac{2\cos^2\theta-1+\cos\theta(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta} \end{aligned}$$

$$= 3\cdot\frac{\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{1+\cos\theta}$$

$$= 3\cdot\frac{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{1+\cos\theta}$$

ここで， $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ より $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos\theta < 1$ から

$$\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \qquad , \ 1 + \cos\theta > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0$$

よって， $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ において $r'(\theta) > 0$ となり， $r(\theta)$ は単調増加

$r(\theta)$ の最大値は

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sin\frac{\pi}{2}}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{3}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}$$ …[答]

(4)　$0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき， $\cos\theta$ は単調減少なので S_1 の最小値は

$$6\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + \pi = 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \pi$$

また，(3) より $S_2 = \pi\{r(\theta)\}^2$ から $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ における S_2 の最大値は

$$\pi\left\{r\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = \frac{9}{4}(2-\sqrt{2})^2\pi$$

$$= \frac{9}{2}(\sqrt{2}-1)^2\pi$$

ここで

$$3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \pi - \frac{9}{2}(\sqrt{2}-1)^2\pi$$

$$= 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2}\{2 - 9(\sqrt{2}-1)^2\}$$

$$= 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2}(-25 + 18\sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2}(\sqrt{648}-\sqrt{625})>0$$

よって， $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき (S_1の最小値)$>$(S_2の最大値) となるので

$S_1>S_2$ [証明終]

高松高等予備校