

[1]

(1) $\alpha = \log_{10} 2$, $\beta = \log_{10} 3$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} 4 &= \log_{10} 2^2 \\ &= 2\log_{10} 2 \\ &= 2\alpha\end{aligned}$$

…[答]

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

…[答]

$$\begin{aligned}\log_{10} 6 &= \log_{10} 2 \cdot 3 \\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= \alpha + \beta\end{aligned}$$

…[答]

(2) $\log_{10} 48 = \log_{10} 2^4 \cdot 3$

$$\begin{aligned}&= 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 4 \times 0.3010 + 0.4771 \\ &= 1.6811\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 50 &= \log_{10} 10 \cdot 5 \\ &= \log_{10} 10 + \log_{10} 5 \\ &= 1 + (1 - 0.3010) \\ &= 1.699\end{aligned}$$

ここで、 $48 < 7^2 < 50$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10} 48 < \log_{10} 7^2 < \log_{10} 50$$

$$1.6811 < 2\log_{10} 7 < 1.699$$

$$0.84 < 0.84055 < \log_{10} 7 < 0.8495 < 0.85$$

ゆえに、 $0.84 < \log_{10} 7 < 0.85$

[証明終]

(3) $11^2 = 121$ より

$$120 < 11^2 < 125$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 120 &= \log_{10} 10 + \log_{10} 12 \\ &= 1 + 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 1 + 2 \times 0.3010 + 0.4771 \\ &= 2.0791\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 125 &= \log_{10} 5^3 \\ &= 3\log_{10} 5 \\ &= 3 \times (1 - 0.3010)\end{aligned}$$

$$=2.097$$

よって、 $120 < 11^2 < 125$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10} 120 < \log_{10} 11^2 < \log_{10} 125$$

$$2.0791 < 2\log_{10} 11 < 2.097$$

$$1.03 < 1.03955 < \log_{10} 11 < 1.0485 < 1.05$$

ゆえに、 $1.03 < \log_{10} 11 < 1.05$

[証明終]

高松高等予備校

[2]

(1) $y = ax^2 + bx + c$ が 3 点 A(1, 4), B(2, 4), C(3, 0) を通るから

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

これらを解いて $a = -2, b = 6, c = 0$

…[答]

(2) (1) から $y = -2x^2 + 6x$

点 P($t, -2t^2 + 6t$) から直線 OB に引いた垂線の足を H とする
直線 OB の方程式は $2x - y = 0$ であるから

$$PH = \frac{|2t - (-2t^2 + 6t)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2t^2 - 4t|}{\sqrt{5}}$$

線分 OB の長さは $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

よって $\triangle OBP$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot OB \cdot PH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|2t^2 - 4t|}{\sqrt{5}} \\ &= |2t^2 - 4t| \\ &= |2t(t - 2)| \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } S = \begin{cases} -2t^2 + 4t & (0 \leq t \leq 2 \text{ のとき}) \\ 2t^2 - 4t & (2 < t \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

…[答]

(3) (2) より

$0 \leq t \leq 2$ のとき

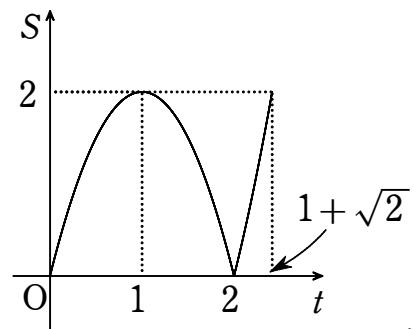
$$S = -2(t - 1)^2 + 2$$

$2 < t \leq 3$ のとき

$$S = 2(t - 1)^2 - 2$$

グラフより, S を最大とする t の値は

$$1, 1 + \sqrt{2}$$



…[答]

高松高等予備校

[3]

$$\begin{aligned}(1) \quad & (2+x^3)-(1+x+x^2) \\ & = x^3-x^2-x+1 \\ & = x^2(x-1)-(x-1) \\ & = (x^2-1)(x-1) \\ & = (x+1)(x-1)^2 > 0 \quad (0 < x < 1 \text{ より}) \\ & \text{よって } 1+x+x^2 < 2+x^3\end{aligned}$$

[証明終]

$$(2) \quad f_n(x) = n + x^{n+1} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \quad \text{とおき}$$

$n \geq 2$ のとき $f_n(x) > 0 \dots$ (A) を示す

[1] $n=2$ のとき

$$f_2(x) = 2 + x^3 - (1 + x + x^2)$$

(1)より $f_2(x) > 0$ となり $n=2$ のとき(A)は成り立つ

[2] $n=k \geq 2$ のとき(A)が成り立つ

$$\text{すなわち } k + x^{k+1} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^k) > 0$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) &= k+1 + x^{k+2} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^k + x^{k+1}) \\ &= \{k + x^{k+1} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^k)\} \\ &\quad + (1 - x^{k+1} + x^{k+2} - x^{k+1}) \\ &= f_k(x) + (x^{k+2} - 2x^{k+1} + 1) \\ &> x^{k+2} - 2x^{k+1} + 1 \\ &= (1 - x^{k+1}) - (x^{k+1} - x^{k+2}) \\ &= (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k) - x^{k+1}(1-x) \\ &= (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k - x^{k+1})\end{aligned}$$

$0 < x < 1$ のとき $1-x > 0$, $1-x^{k+1} > 0$ から

$$1+x+x^2+\cdots+x^k - x^{k+1} > 0$$

よって $f_{k+1}(x) > 0$ となり $n=k+1$ のときも(A)は成り立つ

[1], [2]より, 2以上の自然数 n に対して

$$1+x+x^2+\cdots+x^n < n+x^{n+1} \text{ は成り立つ}$$

[証明終]

[4]

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + k$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$= 3(x+3)(x-1)$$

よって、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|----|-----|
| x | ... | -3 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

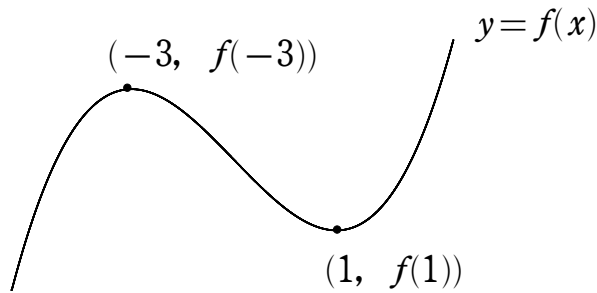
これにより極値は

$$\begin{cases} \text{極大値} & f(-3) = k + 27 \\ \text{極小値} & f(1) = k - 5 \end{cases}$$

...[答]

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解は $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標として得られる。

(1) の増減表より、曲線 $y = f(x)$ のグラフを図示すると



図より、 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \text{ かつ } f(1) < 0 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ f(-3) = 0 \text{ または } f(1) = 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ f(-3) < 0 \text{ または } f(1) > 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} -27 < k < 5 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ k = -27, 5 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k < -27, 5 < k \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

...[答]

(3) (2) より、 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき $-27 < k < 5$

このとき $f(-3) > 0$ かつ $f(1) < 0$

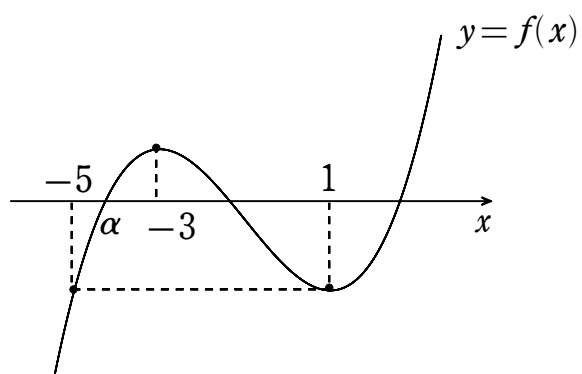
また

$$f(-5) = -125 + 75 + 45 + k$$

$$= k - 5$$

$$= f(1) < 0$$

よって、曲線 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の関係を図示すると



$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとして、それらのうち最も小さいものを α とすると、図より

$$-5 < \alpha < -3$$

[証明終]

高松高等予備校

[5]

$$C: y = e^{2x}$$

(1) 接点を (t, e^{2t}) とおく

$$y' = 2e^{2x} \text{ より}$$

$$\text{接線の方程式は } y = 2e^{2t}(x - t) + e^{2t}$$

原点を通るから $x = y = 0$ を代入すると

$$0 = -2te^{2t} + e^{2t}$$

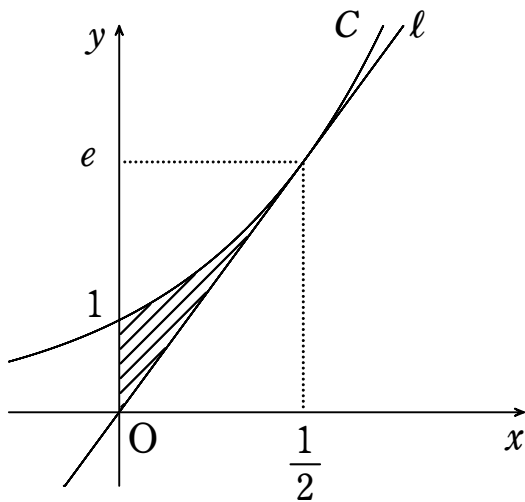
$$e^{2t} > 0 \text{ より } 0 = -2t + 1$$

$$\text{よって } t = \frac{1}{2}$$

求める接線 l の方程式は $y = 2ex$

…[答]

(2)



面積を S とおく

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} e$$

$$= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e$$

$$= \frac{1}{4} (e - 2)$$

…[答]

(3) 体積を V とおく

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x})^2 dx - \frac{1}{3} (\pi e^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{6} e^2 \\ &= \frac{\pi}{4} (e^2 - 1) - \frac{\pi}{6} e^2 \\ &= \frac{\pi}{12} (3e^2 - 3 - 2e^2) \\ &= \frac{\pi}{12} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校