[1]

(1) $\alpha=\log_{10}2$， $\beta=\log_{10}3$ より

$$\log_{10}4=\log_{10}2^2$$
$$=2\log_{10}2$$
$$=2\alpha$$ …[答]

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
$$=1-\alpha$$ …[答]

$$\log_{10}6=\log_{10}2\cdot3$$
$$=\log_{10}2+\log_{10}3$$
$$=\alpha+\beta$$ …[答]

(2) $$\log_{10}48=\log_{10}2^4\cdot3$$
$$=4\log_{10}2+\log_{10}3$$
$$=4\times0.3010+0.4771$$
$$=1.6811$$
$$\log_{10}50=\log_{10}10\cdot5$$
$$=\log_{10}10+\log_{10}5$$
$$=1+(1-0.3010)$$
$$=1.699$$

ここで， $48<7^2<50$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10}48<\log_{10}7^2<\log_{10}50$$
$$1.6811<2\log_{10}7<1.699$$
$$0.84<0.84055<\log_{10}7<0.8495<0.85$$

ゆえに， $0.84<\log_{10}7<0.85$ [証明終]

(3) $11^2=121$ より

$$120<11^2<125$$
$$\log_{10}120=\log_{10}10+\log_{10}12$$
$$=1+2\log_{10}2+\log_{10}3$$
$$=1+2\times0.3010+0.4771$$
$$=2.0791$$
$$\log_{10}125=\log_{10}5^3$$
$$=3\log_{10}5$$
$$=3\times(1-0.3010)$$

$$=2.097$$

よって， $120<11^2<125$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10}120<\log_{10}11^2<\log_{10}125$$

$$2.0791<2\log_{10}11<2.097$$

$$1.03<1.03955<\log_{10}11<1.0485<1.05$$

ゆえに， $1.03<\log_{10}11<1.05$ [証明終]

高松高等予備校

[2]

(1)　2 曲線の交点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-px+\frac{1}{3}=px^2+\left(\frac{1}{3}-p\right)x-p+\frac{1}{3}$$

より

$$\frac{1}{3}x^3-px^2-\frac{1}{3}x+p=0$$

すなわち，$x^3-3px^2-x+3p=0$ の実数解である

$$\begin{aligned}x^3-3px^2-x+3p&=x^2(x-3p)-(x-3p)\\&=(x-3p)(x+1)(x-1)\\&=0\end{aligned}$$

より

$$x=3p,\ 1,\ -1$$

共有点が 2 つであるには，$3p=1$ または $3p=-1$

よって，$p=\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$　…[答]

(2)　(1) と同様に考えて，共有点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-px+\frac{1}{3}-\left(x^2+px+\frac{2}{3}p^2-p\right)=0$$

すなわち，$x^3-3x^2-6px-(2p^2-3p-1)=0$ の実数解である。これが異なる 2 つの実数解をもつのは，左辺を $f(x)$ とすると，$y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 点を共有，すなわち $y=f(x)$ は極値をもち，極大値 $=0$ または極小値 $=0$ となるときである。

$$f'(x)=3x^2-6x-6p=3(x^2-2x-2p)$$

より，極値をもつには判別式を D とすると

$$D/4=1+2p>0$$

ゆえに，$p>-\frac{1}{2}$　…①

このとき，$f'(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より，$f(\alpha)=0$ または $f(\beta)=0$

ところで

$$f(x)=(x^2-2x-2p)(x-1)-2(2p+1)x-(2p^2-p-1)$$

$$=(x^2-2x-2p)(x-1)-(2p+1)(2x+p-1)$$

と変形できる。$2p+1\fallingdotseq 0$ なので

$x^2-2x-2p=0$ のとき，$2x+p-1=0$ であればよい。

２式より，x を消去して $p^2-6p-3=0$

ゆえに，$p=3\pm 2\sqrt{3}$

ところで

$$3-2\sqrt{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{2}>0$$

だから，$p=3-2\sqrt{3}$ も ① を満たす。

以上より，求める p の値は $p=3\pm 2\sqrt{3}$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$(2+x^3)-(1+x+x^2)$

$=x^3-x^2-x+1$

$=x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x^2-1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)^2>0$　($0<x<1$　より)

よって　$1+x+x^2<2+x^3$　[証明終]

(2)　$f_n(x)=n+x^{n+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)$　とおき

$n\geqq 2$ のとき $f_n(x)>0$ …(A) を示す

[1]　$n=2$ のとき

$f_2(x)=2+x^3-(1+x+x^2)$

(1)より $f_2(x)>0$となり $n=2$ のとき(A)は成り立つ

[2]　$n=k\geqq 2$ のとき(A)が成り立つ

すなわち $k+x^{k+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^k)>0$

が成り立つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(x)&=k+1+x^{k+2}-(1+x+x^2+\cdots+x^k+x^{k+1})\\
&=\{k+x^{k+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^k)\}\\
&\qquad\qquad +(1-x^{k+1}+x^{k+2}-x^{k+1})\\
&=f_k(x)+(x^{k+2}-2x^{k+1}+1)\\
&>x^{k+2}-2x^{k+1}+1\\
&=(1-x^{k+1})-(x^{k+1}-x^{k+2})\\
&=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)-x^{k+1}(1-x)\\
&=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k-x^{k+1})
\end{aligned}
$$

$0<x<1$ のとき　$1-x>0$，$1-x^{k+1}>0$ から

$1+x+x^2+\cdots+x^k-x^{k+1}>0$

よって$f_{k+1}(x)>0$ となり$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ

[1]，[2]より，2以上の自然数 n に対して

$1+x+x^2+\cdots+x^n<n+x^{n+1}$ は成り立つ　[証明終]

高松高等予備校

[4]

(1) $$\frac{b+1}{1+a(b+1)}=\frac{b+1}{1+ab+a}=\frac{b}{1+ab+a}+\frac{1}{1+ab+a} \quad \cdots①$$

ここで　a, b は 0 以上だから

$$\frac{b}{1+ab+a}\leqq\frac{b}{1+ab},\quad \frac{1}{1+ab+a}\leqq\frac{1}{1+a}$$

①より $\dfrac{b+1}{1+a(b+1)}\leqq\dfrac{b}{1+ab}+\dfrac{1}{1+a}$ ［証明終］

(2)　(1)の不等式で $a=tx$，$b=x$ とすると $0\leqq x\leqq1$，$t>0$ のとき

tx, x は 0 以上だから

$$\frac{x+1}{1+tx(x+1)}\leqq\frac{x}{1+tx^2}+\frac{1}{1+tx}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x+1}{1+tx(x+1)}dx&\leqq\int_0^1\left(\frac{x}{1+tx^2}+\frac{1}{1+tx}\right)dx\\&=\int_0^1\left\{\frac{1}{2t}\cdot\frac{(1+tx^2)'}{1+tx^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{(1+tx)'}{1+tx}\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{2t}\log(1+tx^2)+\frac{1}{t}\log(1+tx)\right]_0^1\\&=\frac{1}{2t}\log(1+t)+\frac{1}{t}\log(1+t)\\&=\frac{3}{2t}\log(1+t)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{1+tx(x+1)}dx\leqq\frac{3}{2t}\log(1+t)$ ［証明終］

(3)　$\displaystyle I_t=\int_0^1\frac{x+1}{1+tx(x+1)}dx$，$\displaystyle J_t=\int_0^1\frac{tx(x+1)^2}{1+tx(x+1)}dx$ とする

$$\frac{tx(x+1)^2}{1+tx(x+1)}=\frac{(x+1)\{1+tx(x+1)\}-(x+1)}{1+tx(x+1)}=x+1-\frac{x+1}{1+tx(x+1)}$$

より

$$J_t=\int_0^1\left\{x+1-\frac{x+1}{1+tx(x+1)}\right\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1-I_t=\frac{3}{2}-I_t$$

よって　$J_t=\dfrac{3}{2}-I_t$

(2)より　$0\leqq I_t\leqq\dfrac{3}{2t}\log(1+t)$

ここで

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(1+t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{t}\cdot\frac{\log(1+t)}{1+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}+1\right)\cdot\frac{\log(1+t)}{1+t}=1\cdot 0=0$$

はさみうちの原理より　$\lim_{t\to\infty} I_t=0$

従って　$\lim_{t\to\infty} J_t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}-I_t\right)=\frac{3}{2}$　…[答]