[1]

(1)　$\alpha=\log_{10}2$，　$\beta=\log_{10}3$ より

$$\begin{aligned}\log_{10}4&=\log_{10}2^2\\&=2\log_{10}2\\&=2\alpha\end{aligned}$$

…[答]

$$\begin{aligned}\log_{10}5&=\log_{10}\frac{10}{2}\\&=\log_{10}10-\log_{10}2\\&=1-\alpha\end{aligned}$$

…[答]

$$\begin{aligned}\log_{10}6&=\log_{10}2\cdot3\\&=\log_{10}2+\log_{10}3\\&=\alpha+\beta\end{aligned}$$

…[答]

(2)

$$\begin{aligned}\log_{10}48&=\log_{10}2^4\cdot3\\&=4\log_{10}2+\log_{10}3\\&=4\times0.3010+0.4771\\&=1.6811\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}50&=\log_{10}10\cdot5\\&=\log_{10}10+\log_{10}5\\&=1+(1-0.3010)\\&=1.699\end{aligned}$$

ここで，$48<7^2<50$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10}48<\log_{10}7^2<\log_{10}50$$

$$1.6811<2\log_{10}7<1.699$$

$$0.84<0.84055<\log_{10}7<0.8495<0.85$$

ゆえに，$0.84<\log_{10}7<0.85$　[証明終]

(3)　$11^2=121$ より

$$120<11^2<125$$

$$\begin{aligned}\log_{10}120&=\log_{10}10+\log_{10}12\\&=1+2\log_{10}2+\log_{10}3\\&=1+2\times0.3010+0.4771\\&=2.0791\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}125&=\log_{10}5^3\\&=3\log_{10}5\\&=3\times(1-0.3010)\end{aligned}$$

$=2.097$

よって，$120<11^2<125$ より 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10}120<\log_{10}11^2<\log_{10}125$$

$$2.0791<2\log_{10}11<2.097$$

$$1.03<1.03955<\log_{10}11<1.0485<1.05$$

ゆえに，$1.03<\log_{10}11<1.05$ ［証明終］

高松高等予備校

[2]

(1)　$y=ax^2+bx+c$ が 3 点 A(1, 4), B(2, 4), C(3, 0) を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$$

これらを解いて　$a=-2$, $b=6$, $c=0$　…[答]

(2)　(1) から $y=-2x^2+6x$

点 P$(t,\ -2t^2+6t)$ から直線 OB に引いた垂線の足を H とする

直線 OB の方程式は $2x-y=0$ であるから

$$\mathrm{PH}=\frac{|2t-(-2t^2+6t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2t^2-4t|}{\sqrt{5}}$$

線分 OB の長さは　$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

よって △OBP の面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{|2t^2-4t|}{\sqrt{5}}$$
$$=|2t^2-4t|$$
$$=|2t(t-2)|$$

ゆえに　$S=\begin{cases} -2t^2+4t & (0\leqq t\leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2t^2-4t & (2<t\leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$　…[答]

(3)　(2) より

$0\leqq t\leqq 2$ のとき

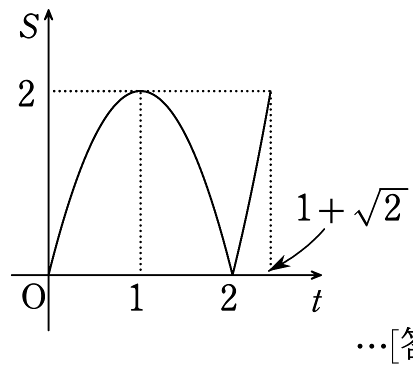
$$S=-2(t-1)^2+2$$

$2<t\leqq 3$ のとき

$$S=2(t-1)^2-2$$

グラフより, $S$ を最大とする $t$ の値は

$1$, $1+\sqrt{2}$　…[答]




高松高等予備校

[3]

(1)　$(2+x^3)-(1+x+x^2)$

$=x^3-x^2-x+1$

$=x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x^2-1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)^2>0$　($0<x<1$　より)

よって　$1+x+x^2<2+x^3$　[証明終]

(2)　$f_n(x)=n+x^{n+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)$　とおき

$n\geqq 2$ のとき $f_n(x)>0$ …(A) を示す

[1]　$n=2$ のとき

$f_2(x)=2+x^3-(1+x+x^2)$

(1)より $f_2(x)>0$となり $n=2$ のとき(A)は成り立つ

[2]　$n=k\geqq 2$ のとき(A)が成り立つ

すなわち $k+x^{k+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^k)>0$

が成り立つと仮定すると

$f_{k+1}(x)=k+1+x^{k+2}-(1+x+x^2+\cdots+x^k+x^{k+1})$

$=\{k+x^{k+1}-(1+x+x^2+\cdots+x^k)\}$

$+(1-x^{k+1}+x^{k+2}-x^{k+1})$

$=f_k(x)+(x^{k+2}-2x^{k+1}+1)$

$>x^{k+2}-2x^{k+1}+1$

$=(1-x^{k+1})-(x^{k+1}-x^{k+2})$

$=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)-x^{k+1}(1-x)$

$=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k-x^{k+1})$

$0<x<1$ のとき　$1-x>0$，$1-x^{k+1}>0$ から

$1+x+x^2+\cdots+x^k-x^{k+1}>0$

よって$f_{k+1}(x)>0$ となり$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ

[1]，[2]より，2以上の自然数 $n$ に対して

$1+x+x^2+\cdots+x^n<n+x^{n+1}$ は成り立つ　[証明終]

[4]

(1)　$f(x)=x^3+3x^2-9x+k$ より

$$f'(x)=3x^2+6x-9$$
$$=3(x+3)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

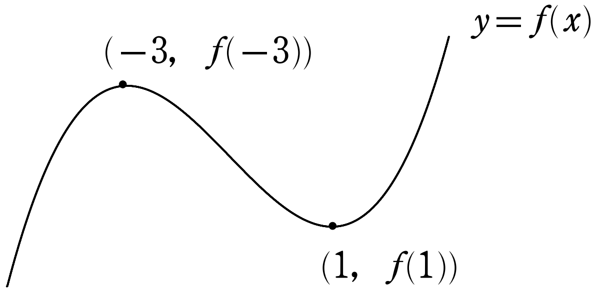
| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

これにより極値は

$$\begin{cases} \text{極大値}\quad f(-3)=k+27 \\ \text{極小値}\quad f(1)=k-5 \end{cases}$$ …[答]

(2)　方程式 $f(x)=0$ の実数解は $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸との共有点の $x$ 座標として得られる。

(1) の増減表より，曲線 $y=f(x)$ のグラフを図示すると




図より，$f(x)=0$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} f(-3)>0 \text{ かつ } f(1)<0 \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\ f(-3)=0 \text{ または } f(1)=0 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ f(-3)<0 \text{ または } f(1)>0 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} -27<k<5 \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\ k=-27,\ 5 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ k<-27,\ 5<k \text{ のとき} & 1\text{ 個} \end{cases}$$ …[答]

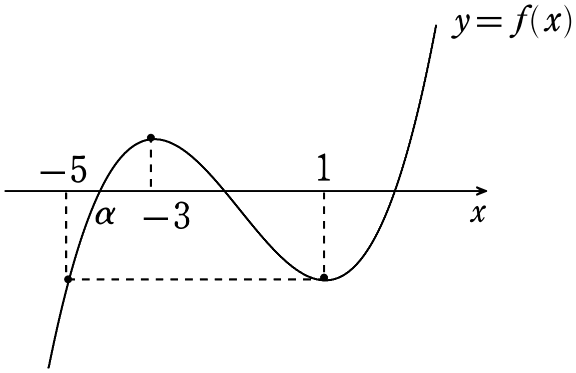
(3)　(2) より，$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき　$-27<k<5$

このとき　$f(-3)>0$ かつ $f(1)<0$

また

$$f(-5)=-125+75+45+k$$
$$=k-5$$
$$=f(1)<0$$

よって，曲線 $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の関係を図示すると




$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとして，それらのうち最も小さいものを $\alpha$ とすると，図より

$$-5<\alpha<-3$$

[証明終]

高松高等予備校