



## 2024年度入学試験問題

# 数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

### 注 意

- 1 問題冊子は1冊(2ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答えだけでなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

$m, n$  を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $x^{3m} - 1$  は  $x^3 - 1$  で割り切れることを示せ。
- (2)  $x^n - 1$  を  $x^2 + x + 1$  で割った余りを求めよ。
- (3)  $x^{2024} - 1$  を  $x^2 - x + 1$  で割った余りを求めよ。

2

数直線上を動く点  $P$  がある。点  $P$  は、原点  $O$  を出発して、1 枚のコインを 1 回投げごとに、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに  $\frac{1}{2}$  であるとし、コインを  $n$  回投げ終えた時点での点  $P$  の座標を  $x_n$  とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $x_{10} = 0$  となる確率を求めよ。
- (2)  $x_5 \neq 1$  かつ  $x_{10} = 0$  となる確率を求めよ。
- (3)  $0 \leq x_n \leq 3$  ( $n = 1, 2, \dots, 9$ ) かつ  $x_{10} = 0$  となる確率を求めよ。

3

四面体  $OABC$  において、 $OA = OB = OC = 1$  とし、 $\angle COA = \alpha$ ,  $\angle COB = \beta$ ,  $\angle AOB = \gamma$  とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  とする。辺  $OA$  の延長上に点  $D$  を  $\vec{OC}$  と  $\vec{CD}$  が垂直になるようにとり、辺  $OB$  の延長上に点  $E$  を  $\vec{OC}$  と  $\vec{CE}$  が垂直になるようにとり、 $\angle DCE = \theta$  とし、 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{CD}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\cos \alpha$  を用いて表せ。また、 $\vec{CE}$  を  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\cos \beta$  を用いて表せ。
- (2)  $\cos \theta$  を  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  を用いて表せ。
- (3)  $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  とする。点  $C$  から平面  $DOE$  に下ろした垂線の足を  $P$  とするとき、 $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$  となることを示せ。

4

座標平面上で、線分  $S: x + y = 1$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と曲線  $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  で囲まれた図形  $D$  を考える。 $S$  上に点  $(0, 1)$  からの距離が  $t$  となる点  $P$  をとる。このとき、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$  である。また、点  $P$  を通り、直線  $x + y = 1$  と垂直に交わる直線を  $l$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $l$  の方程式を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 直線  $l$  と曲線  $C$  の交点を  $Q$  とする。線分  $PQ$  の長さを  $t$  を用いて表せ。
- (3) 図形  $D$  を直線  $x + y = 1$  のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。