

[1]

- (1) $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b \quad \dots\textcircled{1}$$

条件より, $P(-1) = -9$

$$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

①により, $-a + b = -9$

$$2a + b = 12$$

よって, $a = 7, b = -2$

求める余りは, $7x - 2$ …[答]

- (2) 条件より, $P(x)$ を $(x-2)^3$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$P(x) = (x-2)^3 R(x) + 3x^2 - 2x + 4 \quad \dots\textcircled{2}$$

②より

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)^2 \{(x-2)R(x)\} + (x-2)^2 \cdot 3 + 10x - 8 \\ &= (x-2)^2 \{(x-2)R(x) + 3\} + 10x - 8 \end{aligned}$$

よって, 求める余りは $10x - 8$ …[答]

- (3) $P(x)$ を $(x+1)(x-2)^2$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると, 余りは 2次式以下であり, (2)より $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは $10x - 8$ であるから, 余りは $c(x-2)^2 + 10x - 8$ とおける。

よって

$$P(x) = (x+1)(x-2)^2 S(x) + c(x-2)^2 + 10x - 8 \quad \dots\textcircled{3}$$

$P(-1) = 9$ より

$$c(-3)^2 - 10 - 8 = -9$$

よって, $c = 1$

したがって, 求める余りは

$$(x-2)^2 + 10x - 8$$

すなわち $x^2 + 6x - 4$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1) $l_1: mx + y = m + 1$, $l_2: x - my = 2m - 3$ より

l_1 , l_2 の法線ベクトルの 1 つをそれぞれ \vec{v}_1 , \vec{v}_2 とすると

$\vec{v}_1 = (m, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -m)$ と表せる。

よって

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= m \cdot 1 + 1 \cdot (-m) \\ &= m - m \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ より, l_1 と l_2 は垂直である。

…[証明終]

(2) $l_1: mx + y = m + 1$ より

$$(x-1)m + (y-1) = 0$$

よって, これを m についての恒等式とすると

$$x-1=0 \quad \text{かつ} \quad y-1=0$$

$$x=1 \quad \text{かつ} \quad y=1$$

以上より, 直線 l_1 は m の値によらず, 点 $(1, 1)$ を通る。

…[答]

(3) l_1 , l_2 の交点を $P(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} mX + Y = m + 1 \\ X - mY = 2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(X-1) = -Y + 1 & \dots \textcircled{1} \\ X + 3 = m(Y+2) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① について

i) $X=1$ のとき

$$Y=1$$

このとき ② より, $m = \frac{4}{3}$

これは $m > 0$ を満たす。

よって, $m = \frac{4}{3}$ のとき $(X, Y) = (1, 1)$

ii) $X \neq 1$ のとき

① の両辺を $(X-1)$ で割ると

$$m = -\frac{Y-1}{X-1}$$

② に代入して

$$X + 3 = (Y + 2) \cdot \left(-\frac{Y-1}{X-1} \right)$$

$$X^2 + Y^2 + 2X + Y - 5 = 0$$

$$(X+1)^2 + \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

③において、 $X=1$ のとき

$$Y^2 + Y - 2 = 0$$

$$Y = -2, 1$$

よって、 $X \neq 1$ より③において $(X, Y) = (1, -2), (1, 1)$ は除く。

また、 $m > 0$ より

$$-\frac{Y-1}{X-1} > 0$$

$$(X-1)(Y-1) < 0$$

$$\begin{cases} X-1 < 0 \\ Y-1 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X-1 > 0 \\ Y-1 < 0 \end{cases}$$

つまり

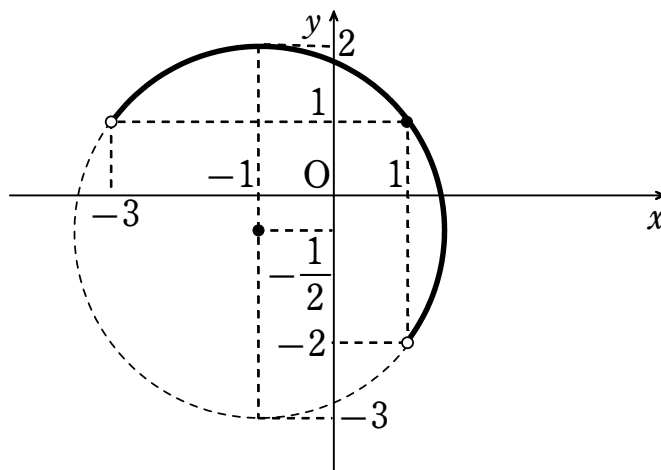
$$\begin{cases} X < 1 \\ Y > 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X > 1 \\ Y < 1 \end{cases}$$

i), ii)より、点Pの軌跡は

中心 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{5}{2}$ の円の $(x < 1$ かつ $y > 1)$ または

$(x > 1$ かつ $y < 1)$ の部分および点 $(1, 1)$

図示すると、下図の実線部分



…[答]

高松高等予備校

[3]

(1) $\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{c}$ より $\vec{a} = 2\vec{c} - 3\vec{b}$

これを $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ に代入して

$$\begin{aligned}(2\vec{c} - 3\vec{b}) \cdot \vec{b} &= 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 3|\vec{b}|^2 \\ &= 2 - 3|\vec{b}|^2 = -1\end{aligned}$$

$|\vec{b}| \geq 0$ であるから $|\vec{b}| = 1$

同様にして

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{a} &= \vec{c} \cdot (2\vec{c} - 3\vec{b}) \\ &= 2|\vec{c}|^2 - 3 = 1\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= |2\vec{c} - 3\vec{b}|^2 \\ &= 4|\vec{c}|^2 - 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{5}$$

以上より $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$

…[答]

(2) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

…[答]

(3) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$

$$\begin{aligned}&= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 8\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}| \geq 0$ であるから $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$

同様にして

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$$

以上より $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$ …[答]

(4) $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

(2), (3) より $|\overrightarrow{AB}|^2=8$, $|\overrightarrow{AC}|^2=5$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=6$

よって $S = \frac{1}{2} \sqrt{40 - 36} = 1$ …[答]

(別解)

\overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のなす角を θ とする

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ だから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

よって, $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校

[4]

(1) $y = \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots \textcircled{1}$

$y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②から

$$\tan x = \cos x$$

$$\sin x = 1 - \sin^2 x$$

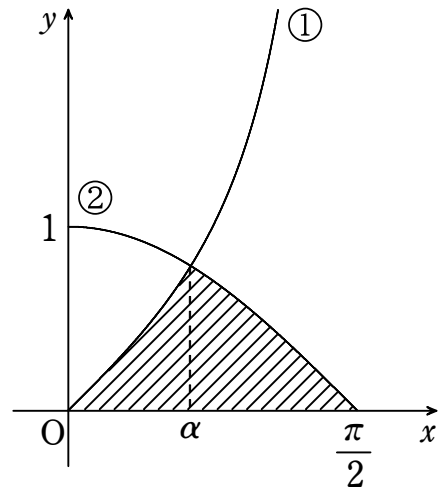
$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$0 \leq \sin x < 1$ より

$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

…[答]



(2) 領域 D は上図の斜線部分だから、面積を S とすると

$$S = \int_0^{\alpha} \tan x dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \left[-\log(\cos x) \right]_0^{\alpha} + \left[\sin x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\log(\cos \alpha) + 1 - \sin \alpha$$

相互関係より $\cos \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

よって $S = -\log \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

…[答]

高松高等予備校