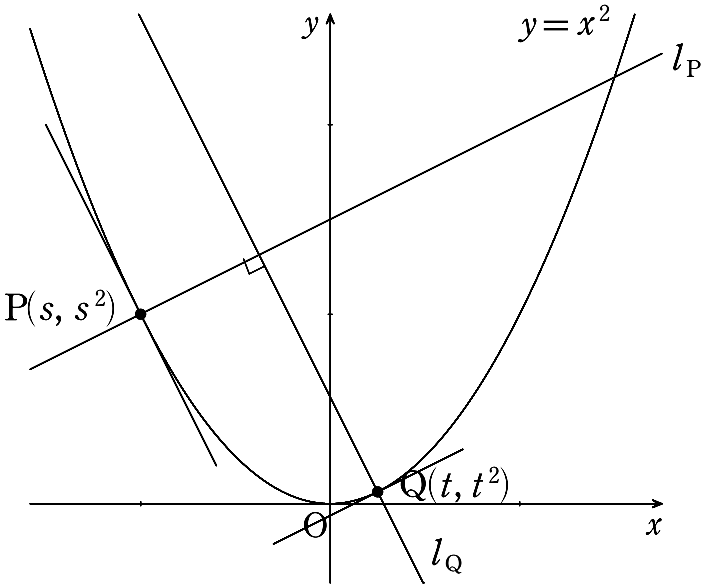
数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$



(1)　$y'=2x$ より点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$ における接線の傾きは $2s$

よって，l_{P} の傾きは $s \neq 0$ より $-\dfrac{1}{2s}$

したがって，l_{P} の方程式は

$$y-s^2=-\frac{1}{2s}(x-s)$$

$$y=-\frac{1}{2s}x+s^2+\frac{1}{2}$$ ……[答]

(2)　(1) より l_{Q} の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

l_{P} と l_{Q} が直交するので

$$\left(-\frac{1}{2s}\right)\left(-\frac{1}{2t}\right)=-1$$

よって

$$t=-\frac{1}{4s}$$

したがって，l_{Q} の方程式は

$$y=2sx+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{2}$$ ……[答]

(3)　l_{P} と l_{Q} の交点の x 座標は (1)，(2)より

$$-\frac{1}{2s}x+s^2+\frac{1}{2}=2sx+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{2}$$

$$\left(2s+\frac{1}{2s}\right)x=s^2-\frac{1}{16s^2}$$

$$2\left(s+\frac{1}{4s}\right)x=\left(s+\frac{1}{4s}\right)\left(s-\frac{1}{4s}\right)$$

$s+\dfrac{1}{4s}\neq 0$ より

$$x=\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)$$

(1) より

$$y=-\frac{1}{4s}\left(s-\frac{1}{4s}\right)+s^2+\frac{1}{2}$$

$$=s^2+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{4}$$

以上より

$$x_0=\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right),\quad y_0=s^2+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{4}$$ ……[答]

(4)　$y_0=s^2+\dfrac{1}{16s^2}+\dfrac{1}{4}$ について

$$s^2>0,\quad \frac{1}{16s^2}>0$$

だから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$s^2+\frac{1}{16s^2}\geqq 2\sqrt{s^2\cdot\frac{1}{16s^2}}=\frac{1}{2}$$

等号成立は，

$$s^2=\frac{1}{16s^2}$$

のとき，したがって，$s^2=\dfrac{1}{4}$ で $s<0$ より $s=-\dfrac{1}{2}$

以上より

$$s^2+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{4}\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$y_0\geqq\frac{3}{4}$$

よって，y_0 が最小となる s の値は

$$s=-\frac{1}{2}$$ ……[答]

$\boxed{2}$

まず条件より　$2=10^{0.3010}$，$3=10^{0.4771}$，$7=10^{0.8451}$である。

また数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 7 の等比数列であるから

$$a_n=7^{n-1}$$

(1)　a_n が 89 桁のとき　$10^{88}\leqq 7^{n-1}<10^{89}$

つまり　$10^{88}\leqq 10^{0.8451\times(n-1)}<10^{89}$

$$88\leqq 0.8451\times(n-1)<89$$

$$\frac{88}{0.8451}\leqq n-1<\frac{89}{0.8451}$$

$$104.1\cdots\leqq n-1<105.3\cdots$$

これを満たす整数 n は $n=106$　…[答]

(2)　$a_n=7^{n-1}$ の一の位の数を b_n とすると，求める数は b_{106} である。

ここで $\{b_n\}$ を並べると

$\{b_n\}$ ： 1，7，9，3，1，7，9，3，1，7，…

$\{b_n\}$ は 1，7，9，3 を繰り返す。

$106=4\times 26+2$ だから　$b_{106}=7$　…[答]

(3)　
$$\begin{aligned}a_{106}&=7^{105}\\&=10^{0.8451\times 105}\\&=10^{88.7355}\\&=10^{0.7355}\times 10^{88}\end{aligned}$$

ここで　$5=\dfrac{10}{2}=10^{0.6990}$，$6=2\times 3=10^{0.7781}$ より

$$5<10^{0.7355}<6$$

したがって a_{106} の最高位の数は 5　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

AP＝BP より

$$AP^2=BP^2$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2$$

$$b=0$$

(1)　$r=1$ より

$$AP^2=BP^2=OP^2$$

$$(a-1)^2+1+c^2=(a-1)^2+1+c^2=a^2+c^2$$

$$a^2-2a+2+c^2=a^2+c^2$$

$$a=1$$

したがって，

$$OP=\sqrt{c^2+1}$$

よって，

$c=0$ のとき OP は最小値 1

以上より

$a=1$，　$b=0$，　$c=0$　…[答]

(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$AP^2=BP^2=\frac{3}{4}OP^2$$

$$(a-1)^2+1+c^2=(a-1)^2+1+c^2=\frac{3}{4}(a^2+c^2)$$

$$4(a^2-2a+2+c^2)=3(a^2+c^2)$$

$$c^2=-a^2+8a-8 \quad \cdots ①$$

$c^2\geqq 0$ より

$$-a^2+8a-8\geqq 0$$

$$a^2-8a+8\leqq 0$$

$4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2}$　…[答]

(3)

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=(a,0,c)\cdot(a-1,-1,c)$$

$$=a(a-1)+c^2$$

(2) の①より

$$=a(a-1)-a^2+8a-8$$

$$=7a-8$$

(2) より

$4-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 4+2\sqrt{2}$

$20-14\sqrt{2} \leqq 7a-8 \leqq 20+14\sqrt{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の

最大値は $20+14\sqrt{2}$ ，最小値 $20-14\sqrt{2}$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　9枚とも札を区別して考える。

Aの2枚の取り出し方は

$${}_9C_2=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36\text{（通り）}$$

Aが同じ数字となる取り出し方は，$\boxed{1}$の札を2枚取り出すときを考えて，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$でも同様の取り出し方があることから

$${}_3C_2\cdot 3=9\text{（通り）}$$

よって，求める確率は

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$ …[答]

(2)　求める確率は，AとBが全く異なる数字の札を取り出す事象の余事象が起こる確率

A，Bがそれぞれ2枚，3枚取る方法は　${}_9C_2\cdot{}_7C_3=1260$（通り）

AとBが全く異なる札を取り出す場合は以下の場合

ⅰ)　Bがすべて同じ数字の札を取り出す場合

Aは残りどの2枚を取り出してもよいので，取り出し方は

$${}_3C_3\cdot 3\cdot{}_6C_2=45\text{（通り）}$$

ⅱ)　Bが2枚だけ同じ数字の札を取り出す場合

Bが$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を取り出すとすると，Aは$\boxed{3}$，$\boxed{3}$を取り出すので，取り出し方は

$${}_3C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_2=27\text{（通り）}$$

Bの取り出し方は，$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$，$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$，$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}$，$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}$もあるので

$$27\cdot 6=162\text{（通り）}$$

ⅲ)　Bが3枚とも異なる数字$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$の札を取り出す場合

Aが取り出す札といずれかの数字は同じになるので，全く異なることはない。

ⅰ)～ⅲ)より，求める確率は

$$1-\frac{45+162}{1260}=1-\frac{207}{1260}$$
$$=1-\frac{23}{140}$$
$$=\frac{117}{140}$$ …[答]

高松高等予備校