数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

まず条件より　$2=10^{0.3010}$，　$3=10^{0.4771}$，　$7=10^{0.8451}$である。

$S_n=\dfrac{7}{6}(a_n-1)$ …①

(1)　①で $n=1$ とすると　$a_1=\dfrac{7}{6}(a_1-1)$より $a_1=7$

また①で n を $n+1$ として　$S_{n+1}=\dfrac{7}{6}(a_{n+1}-1)$…②

②−①より　$S_{n+1}-S_n=\dfrac{7}{6}(a_{n+1}-a_n)$

これを整理して　$a_{n+1}=7a_n$

数列 $\{a_n\}$ は初項 7，公比 7 の等比数列である。

したがって　$a_n=7^n$　…[答]

(2)　a_n が 89 桁のとき　$10^{88}\leqq 7^n<10^{89}$

つまり　$10^{88}\leqq 10^{0.8451\times n}<10^{89}$

$88\leqq 0.8451\times n<89$

$\dfrac{88}{0.8451}\leqq n<\dfrac{89}{0.8451}$

$104.1\cdots\leqq n<105.3\cdots$

これを満たす整数 n は $n=105$　…[答]

(3)　$a_n=7^n$ の一の位の数を b_n とすると，求める数は b_{105} である。

ここで $\{b_n\}$ を並べると

$\{b_n\}$ ：7，9，3，1，7，9，3，1，7，9,…

$\{b_n\}$ は 7，9，3，1を繰り返す。

$105=4\times 26+1$ だから　$b_{105}=7$　…[答]

(4)　$a_{105}=7^{105}$

$=10^{0.8451\times 105}$

$=10^{88.7355}$

$=10^{0.7355}\times 10^{88}$

ここで　$5=\dfrac{10}{2}=10^{0.6990}$，　$6=2\times 3=10^{0.7781}$ より

$5<10^{0.7355}<6$

したがって a_{105} の最高位の数は 5　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　条件より $ax^2+b=0$ の 2 解が $x=\pm p$ で $p>0$ ゆえ

$$S=a\int_{-p}^{p}(x-p)(x+p)dx=-\frac{4ap^3}{3}$$ …[答]

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，　$g(x)=ax^2+b$ とすると

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2},\quad g'(x)=2ax$$

条件より　$f(t)=g(t)$　かつ　$f'(t)=g'(t)$

$$\therefore\quad \frac{1}{t^2+1}=at^2+b\ \cdots①\qquad \frac{-2t}{(t^2+1)^2}=2at\ \cdots②$$

$t>0$ のとき②より $a=-\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$ …[答]

このとき，①より $b=\dfrac{1}{t^2+1}+\dfrac{t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}$ …[答]

(3)　$ax^2+b=0$，$a\fallingdotseq 0$ ゆえ解と係数の関係より

$$\frac{b}{a}=-p^2\quad よって\quad p^2=(t^2+1)^2\times\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}=2t^2+1$$

(1)より $S=-\dfrac{4}{3}ap^3$

$$=-\frac{4}{3}\times\frac{-1}{(t^2+1)^2}\times(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3(t^2+1)^2}$$ …[答]

(4)　(3)より　$S=\dfrac{4(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3(t^2+1)^2}$

両辺を t で微分して

$$\frac{dS}{dt}=\frac{4\left\{\frac{3}{2}(2t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4t(t^2+1)^2-4t(t^2+1)(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}}{3(t^2+1)^4}$$

$$=\frac{-8t\sqrt{2t^2+1}\,(t-1)(t+1)}{3(t^2+1)^3}$$

$t>0$ における S の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{dS}{dt}$		$+$	0	$-$
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$

S は $t=1$ で極大かつ最大となる。

このとき，(2)より $a=-\dfrac{1}{4}$， $b=\dfrac{3}{4}$

よって求める D の方程式は

$y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　9枚とも札を区別して考える。

Aの2枚の取り出し方は

$${}_9C_2=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36\ (\text{通り})$$

Aが同じ数字となる取り出し方は，$\boxed{1}$の札を2枚取り出すときを考えて，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$でも同様の取り出し方があることから

$${}_3C_2\cdot 3=9\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$ …[答]

(2)　9枚のカードをA，B，Cにそれぞれ2枚，2枚，3枚に分ける方法が取り出し方となるので

$${}_9C_2\cdot {}_7C_2\cdot {}_5C_3=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=9\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 10\ (\text{通り})$$

Cは3枚とも異なるカードを取り出すので，取り出し方は

$${}_3C_1\cdot {}_3C_1\cdot {}_3C_1=3^3\ (\text{通り})$$

このとき残りの6枚は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$が2枚ずつある。

Aが$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を取り出し，Bが異なるカードを取り出す方法はBが同じカード$\boxed{3}$，$\boxed{3}$を取り出すときの余事象なので

$${}_2C_1\cdot {}_2C_1\cdot ({}_4C_2-1)=20\ (\text{通り})$$

Aが$\boxed{1}$，$\boxed{3}$と$\boxed{2}$，$\boxed{3}$を取り出すことも考えると

求める確率は

$$\frac{3^3\cdot 20\cdot 3}{9\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 10}=\frac{3}{14}$$ …[答]

(3)　求める確率は，AとCが全く異なる数字の札を取り出す事象の余事象が起こる確率

A，Cがそれぞれ2枚，3枚取る方法は

$${}_9C_2\cdot {}_7C_3=1260\ (\text{通り})$$

AとCが全く異なる札を取り出す場合は以下の場合

ⅰ）　Cがすべて同じ数字の札を取り出す場合

Aは残りどの2枚を取り出してもよいので，取り出し方は

$${}_3C_3\cdot 3\cdot {}_6C_2=45\ (\text{通り})$$

ⅱ）　Cが2枚だけ同じ数字の札を取り出す場合

Cが$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を取り出すとすると，Aは$\boxed{3}$，$\boxed{3}$を取り出すので，取り出し方は

$$ {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_2 = 27 \text{（通り）} $$

Cの取り出し方は，$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$，$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$，$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{1}$，$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}$もあるので

$$ 27 \cdot 6 = 162 \text{（通り）} $$

iii)　Cが3枚とも異なる数字$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$の札を取り出す場合

Aが取り出す札といずれかの数字は同じになるので，全く異なることはない。

i) ～ iii) より，求める確率は

$$ \begin{aligned} 1-\frac{45+162}{1260} &= 1-\frac{207}{1260} \\ &= 1-\frac{23}{140} \\ &= \frac{117}{140} \end{aligned} $$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　$\angle \mathrm{BAD}=2\alpha$ とすると，

四角形 ABCD は平行四辺形だから

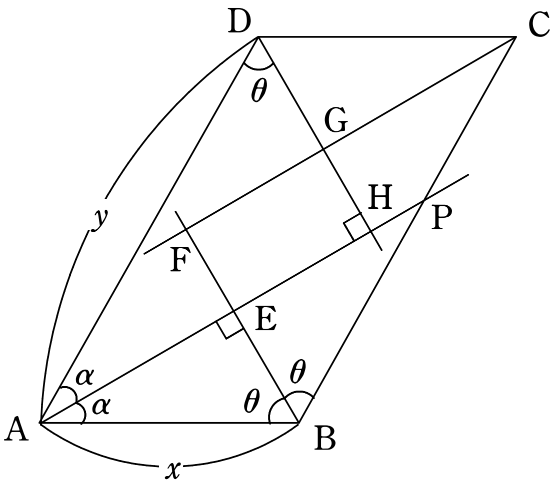
$$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{BAD}=\pi$$

$$2\theta+2\alpha=\pi$$

このとき　$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$$\angle \mathrm{AEB}=\pi-(\theta+\alpha)$$

$$=\frac{\pi}{2}$$ …[答]



(2)　$\mathrm{AE}=\mathrm{AB}\sin\theta=x\sin\theta$ …[答]

$\triangle \mathrm{AHD}$ において，(1) と同様に

$$\angle \mathrm{AHD}=\frac{\pi}{2}$$

$\mathrm{AD}=y$，$\angle \mathrm{ADH}=\theta$ より

$$\mathrm{AH}=y\sin\theta$$ …[答]

(3)　ℓ_{A} と辺 BC との交点を P とすると

$$\mathrm{AP}=2x\sin\theta$$

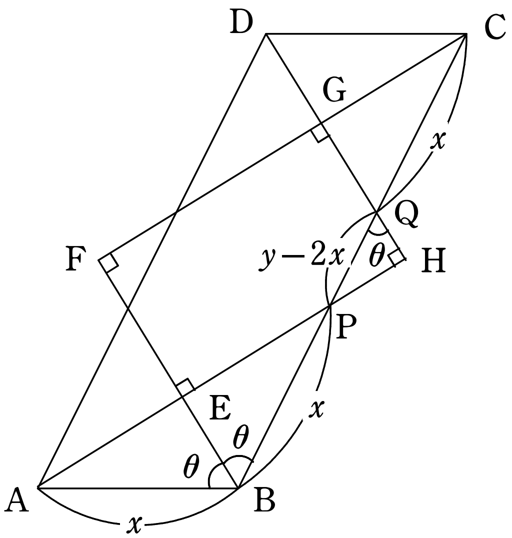
点 H が平行四辺形の外部にあるのは

$\mathrm{AH}>\mathrm{AP}$ のとき

$$y\sin\theta>2x\sin\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta>0$ であるから

求める条件は　$y>2x$ …[答]



(4)　四角形 EFGH は (1) より長方形

（i）　$0<y\leqq 2x$ のとき

点 H は平行四辺形の内部にあるから　$S=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}$

$$\begin{aligned}\mathrm{EF}&=\mathrm{BF}-\mathrm{BE}\\&=y\cos\theta-x\cos\theta\\&=(y-x)\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{EH}&=\mathrm{AH}-\mathrm{AE}\\&=y\sin\theta-x\sin\theta\\&=(y-x)\sin\theta\end{aligned}$$

よって　$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$ …[答]

（ii）　$y>2x$ のとき

ℓ_{D} と辺 BC との交点を Q とする

$$S=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}-2\triangle\mathrm{PQH}$$

$$\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$$

$\mathrm{PH}=(y-2x)\sin\theta$， $\mathrm{QH}=(y-2x)\cos\theta$ より

$$\triangle\mathrm{PQH}=\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta-(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$

$$=\{(y^2-2xy+x^2)-(y^2-4xy+4x^2)\}\sin\theta\cos\theta$$

$$=(2xy-3x^2)\sin\theta\cos\theta$$

…[答]

高松高等予備校