[1]

(1)　取り出した 2 個の球の色が異なるのは

i ）　袋 A から赤球，袋 B から白球を取り出す

ii）　袋 A から白球，袋 B から赤球を取り出す

の 2 つの場合である。

よって，$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{15}+\dfrac{6}{15}=\dfrac{8}{15}$ …[答]

(2)　4 個の球の色がすべて同じであるのは

i ）　袋 A から赤球 2 個，袋 B から赤球 2 個を取り出す

ii）　袋 A から白球 2 個，袋 B から白球 2 個を取り出す

の 2 つの場合である。

よって，$\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{50}+\dfrac{2}{50}=\dfrac{3}{50}$ …[答]

(3)　袋 A の白球の個数が 4 個になるのは

i ）　袋 A から赤球 2 個を取り出し，袋 B から赤球 2 個を取り出し袋 A に入れる

ii）　袋 A から赤球，白球 1 個ずつ取り出し，袋 B から赤球，白球 1 個ずつ取り出し袋 A に入れる

iii）　袋 A から白球 2 個を取り出し，袋 B から白球 2 個を取り出し袋 A に入れる

の 3 つの場合である。

袋 B から取り出すとき，袋 A からの 2 個が増えていることを考えて

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}+\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$$

$$=\frac{10}{315}+\frac{96}{315}+\frac{36}{315}=\frac{142}{315}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\gamma}=2\cdot 1$$

よって,

$$\mathrm{BC}=2\sin\alpha\ ,\quad \mathrm{CA}=2\sin\beta\ ,\quad \mathrm{AB}=2\sin\gamma$$

したがって,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cdot\sin\gamma$$

$$=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

…[答]

(2)　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ より

$$\gamma=\frac{5}{6}\pi-\beta$$

(1)より

$$S=2\sin\frac{\pi}{6}\sin\beta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\beta\right)$$

$$=\sin\beta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\beta\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{5}{6}\pi-\cos\left(2\beta-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(2\beta-\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$0<\beta<\dfrac{5}{6}\pi$ より $-\dfrac{5}{6}\pi<2\beta-\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{5}{6}\pi$

したがって,

$2\beta-\dfrac{5}{6}\pi=0$ のとき,

ようするに,$\beta=\dfrac{5}{12}\pi$,$\gamma=\dfrac{5}{12}\pi$のとき

S は最大値 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

…[答]

(3)　$\alpha=\beta$ より

$$\gamma=\pi-2\alpha$$

内接円の半径が r より

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r=S$$

(1)より

$$\frac{1}{2}(2\sin\alpha+2\sin\beta+2\sin\gamma)r=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$(2\sin\alpha+\sin(\pi-2\alpha))r=2\sin^2\alpha\sin(\pi-2\alpha)$$

$$(2\sin\alpha+\sin 2\alpha)r=2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$$

$$(2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)r=4\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha(1+\cos\alpha)r=2\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} r&=2(1-\cos\alpha)\cos\alpha \\ &=-2\cos^2\alpha+2\cos\alpha \\ &=-2\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0<\cos\alpha<1$ より

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$， $\beta=\dfrac{\pi}{3}$， $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

r は最大値 $\dfrac{1}{2}$ …[答]

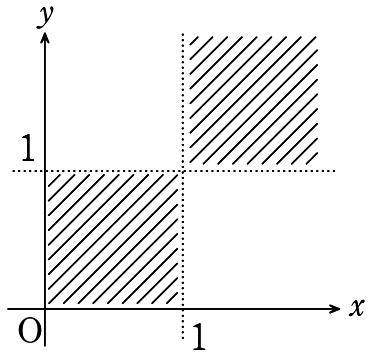
高松高等予備校

[3]

(1)　$\log_x y > 0$

(i)　$0 < x < 1$ のとき $0 < y < 1$

(ii)　$x > 1$ のとき $y > 1$



点 $(x,\ y)$の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

(2)　$\log_x y = t$ とおくと $t \neq 0$

$$\log_x y + \frac{3}{\log_x y} - 4 < 0$$

より　$t + \frac{3}{t} - 4 < 0$

両辺に t^2 をかけると

$t^3 - 4t^2 + 3t < 0$

$t(t-1)(t-3) < 0$

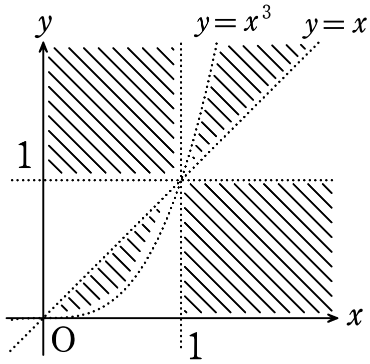
よって $t < 0$，$1 < t < 3$

$\log_x y < 0$，$1 < \log_x y < 3$

$\log_x y < \log_x 1$，$\log_x x < \log_x y < \log_x x^3$

(i)　$0 < x < 1$ のとき　$y > 1$，$x > y > x^3$

(ii)　$1 < x$ のとき $0 < y < 1$，$x < y < x^3$



点 $(x,\ y)$の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$y=f(x)$ 上の点P$(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$ なので

$$y-\frac{1}{1-t^2}=\frac{2t}{(1-t^2)^2}(x-t)$$

$$\therefore\quad y=\frac{2t}{(1-t^2)^2}x+\frac{1-3t^2}{(1-t^2)^2}$$

これが原点を通ればよいので

$$\frac{1-3t^2}{(1-t^2)^2}=0$$

$\therefore\quad t^2=\dfrac{1}{3}$ より $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これは $-1<t<1$ を満たす。

よって，求める接線の方程式は

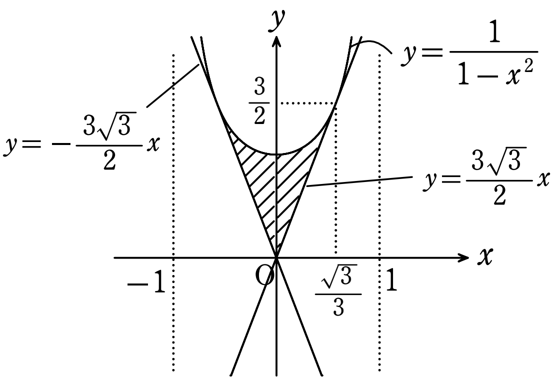
$$\left.\begin{array}{l}\text{接点}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{2}\right)\text{のとき}\quad y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x \\ \text{接点}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{2}\right)\text{のとき}\quad y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x\end{array}\right\}\cdots[\text{答}]$$

(2)　$f'(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ より

$f'(x)=0$とすると $x=0$ なので増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	／	↘	1	↗	／

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=+\infty$$



図形 D は図の斜線部分。

$f(-x)=f(x)$なので図形 D は y 軸に関して対称である。

よって，求める図形 D の面積 S は

$$S=2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1-x^2}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{2}\right\}$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ …[答]

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{2}-\pi\int_1^{\frac{3}{2}}x^2dy$$

ところで $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ より $x^2=1-\dfrac{1}{y}$ だから

$$V=\frac{\pi}{6}-\pi\int_1^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{6}-\pi\Big[y-\log|y|\Big]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{6}-\pi\left\{\left(\frac{3}{2}-1\right)-\log\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\left(\log\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\pi$$ …[答]

高松高等予備校