[1]

(1)　取り出した2個の球の色が異なるのは

ｉ）　袋Aから赤球，袋Bから白球を取り出す

ii）　袋Aから白球，袋Bから赤球を取り出す

の2つの場合である。

よって，　$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{15}+\frac{6}{15}=\frac{8}{15}$　…[答]

(2)　4個の球の色がすべて同じであるのは

ｉ）　袋Aから赤球2個，袋Bから赤球2個を取り出す

ii）　袋Aから白球2個，袋Bから白球2個を取り出す

の2つの場合である。

よって，　$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{50}+\frac{2}{50}=\frac{3}{50}$　…[答]

(3)　袋Aの白球の個数が4個になるのは

ｉ）　袋Aから赤球2個を取り出し，袋Bから赤球2個を取り出し袋Aに入れる

ii）　袋Aから赤球，白球1個ずつ取り出し，袋Bから赤球，白球1個ずつ取り出し袋Aに入れる

iii）　袋Aから白球2個を取り出し，袋Bから白球2個を取り出し袋Aに入れる

の3つの場合である。

袋Bから取り出すとき，袋Aからの2個が増えていることを考えて

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}+\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$$

$$=\frac{10}{315}+\frac{96}{315}+\frac{36}{315}=\frac{142}{315}$$　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\gamma}=2\cdot 1$$

よって，

$$\mathrm{BC}=2\sin\alpha\ ,\quad \mathrm{CA}=2\sin\beta\ ,\quad \mathrm{AB}=2\sin\gamma$$

したがって，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cdot\sin\gamma$$

$$=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$ …[答]

(2)　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ より

$$\gamma=\frac{5}{6}\pi-\beta$$

(1)より

$$S=2\sin\frac{\pi}{6}\sin\beta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\beta\right)$$

$$=\sin\beta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\beta\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{5}{6}\pi-\cos\left(2\beta-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(2\beta-\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$0<\beta<\dfrac{5}{6}\pi$ より $-\dfrac{5}{6}\pi<2\beta-\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，

$2\beta-\dfrac{5}{6}\pi=0$ のとき，

ようするに，$\beta=\dfrac{5}{12}\pi$，$\gamma=\dfrac{5}{12}\pi$のとき

S は最大値 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ …[答]

(3)　$\alpha=\beta$ より

$$\gamma=\pi-2\alpha$$

内接円の半径が r より

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r=S$$

(1)より

$$\frac{1}{2}(2\sin\alpha+2\sin\beta+2\sin\gamma)r=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$(2\sin\alpha+\sin(\pi-2\alpha))r=2\sin^2\alpha\sin(\pi-2\alpha)$$

$$(2\sin\alpha+\sin 2\alpha)r=2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$$

$$(2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)r=4\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha(1+\cos\alpha)r=2\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より

$$r=2(1-\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$=-2\cos^2\alpha+2\cos\alpha$$

$$=-2\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0<\cos\alpha<1$ より

$\alpha=\frac{\pi}{3}$， $\beta=\frac{\pi}{3}$， $\gamma=\frac{\pi}{3}$ のとき

r は最大値 $\frac{1}{2}$ …[答]

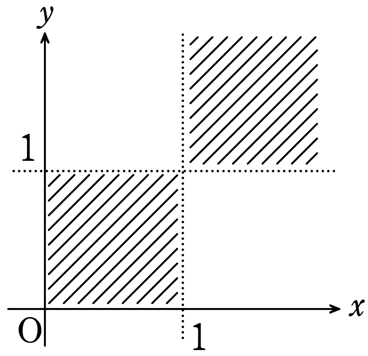
高松高等予備校

[3]

(1)　$\log_x y > 0$

(i)　$0 < x < 1$ のとき $0 < y < 1$

(ii)　$x > 1$ のとき $y > 1$



点 $(x,\ y)$ の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

(2)　$\log_x y = t$ とおくと $t \neq 0$

$$\log_x y + \frac{3}{\log_x y} - 4 < 0$$

より　$t + \dfrac{3}{t} - 4 < 0$

両辺に t^2 をかけると

$t^3 - 4t^2 + 3t < 0$

$t(t-1)(t-3) < 0$

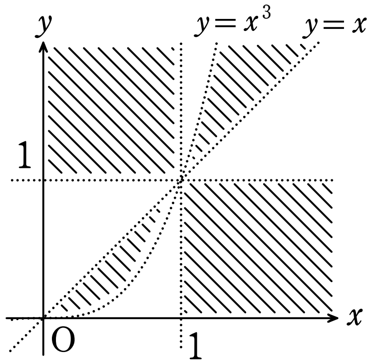
よって $t < 0$，$1 < t < 3$

$\log_x y < 0$，$1 < \log_x y < 3$

$\log_x y < \log_x 1$，$\log_x x < \log_x y < \log_x x^3$

(i)　$0 < x < 1$ のとき　$y > 1$，$x > y > x^3$

(ii)　$1 < x$ のとき $0 < y < 1$，$x < y < x^3$



点 $(x,\ y)$ の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

[4]

(1) $f(x)=x^3+3x^2-6ax$

$$f'(x)=3x^2+6x-6a$$
$$=3(x^2+2x-2a)$$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1+2a\leqq 0$$

$$a\leqq -\frac{1}{2}$$ …[答]

(2) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ より

$$\frac{1}{4}+1-2a=0$$

$$a=\frac{5}{8}$$

このとき　$f'(x)=\frac{3}{4}(2x-1)(2x+5)$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	$-\frac{5}{2}$	…	$\frac{1}{2}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

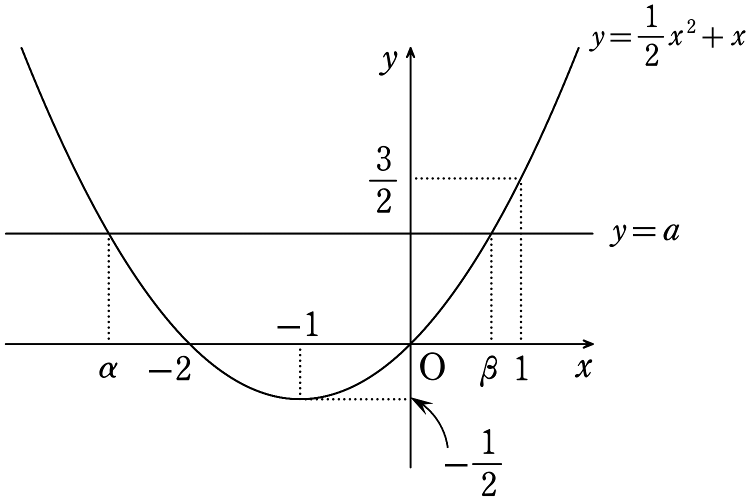
よって，$a=\frac{5}{8}$ …[答]

(3) $a>-\frac{1}{2}$ のとき $f'(x)=0$ の実数解を α，β とおく $(\alpha<\beta)$

α，β は $x^2+2x-2a=0$ の解より

$$\frac{1}{2}x^2+x=a$$

$y=\frac{1}{2}x^2+x$ と $y=a$ の交点の x 座標を調べる。



（i） $a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=f(x)$ は単調増加

最小値　$f(-1)=6a+2$ …[答]

（ii） $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値は $f(\beta)$

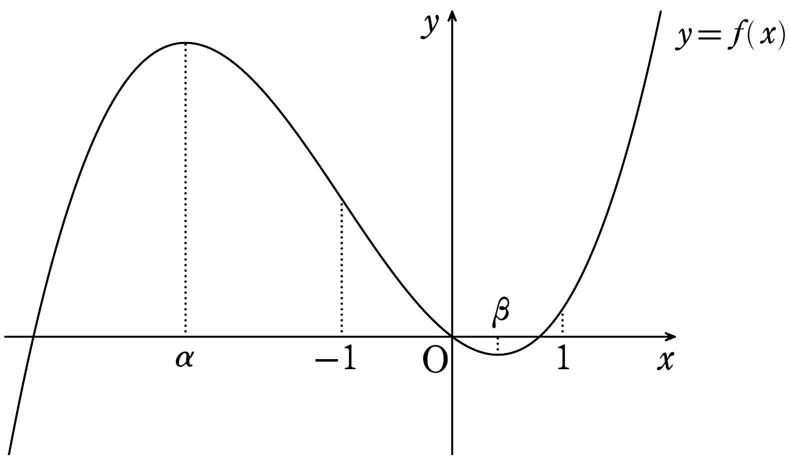
ここで

$$f(x)=\frac{1}{3}f'(x)(x+1)-2(2a+1)x+2a$$

より　$f(\beta)=-2(2a+1)\beta+2a$

$\beta=-1+\sqrt{1+2a}$ を代入

$$f(\beta)=6a+2-2(2a+1)\sqrt{2a+1}$$ …[答]



（iii） $a \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ において $y=f(x)$ は単調減少

最小値　$f(1)=4-6a$ …[答]

[5]

(1)　$y=f(x)$ 上の点P$(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}\ \text{なので}$$

$$y-\frac{1}{1-t^2}=\frac{2t}{(1-t^2)^2}(x-t)$$

$$\therefore\quad y=\frac{2t}{(1-t^2)^2}x+\frac{1-3t^2}{(1-t^2)^2}$$

これが原点を通ればよいので

$$\frac{1-3t^2}{(1-t^2)^2}=0$$

$\therefore$　$t^2=\dfrac{1}{3}$ より $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これは $-1<t<1$ を満たす。

よって，求める接線の方程式は

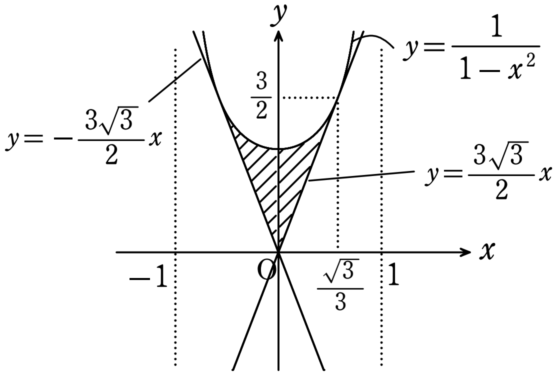
$$\left.\begin{aligned}&\text{接点}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{2}\right)\text{のとき}\quad y=\frac{3\sqrt{3}}{2}x\\&\text{接点}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{2}\right)\text{のとき}\quad y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}\right\}\cdots[\text{答}]$$

(2)　$f'(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ より

$f'(x)=0$とすると $x=0$ なので増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=+\infty$$



図形 D は図の斜線部分。

$f(-x)=f(x)$なので図形 D は y 軸に関して対称である。

よって，求める図形 D の面積 S は

$$S=2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1-x^2}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{2}\right\}$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ …[答]

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{2}-\pi\int_1^{\frac{3}{2}}x^2dy$$

ところで $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ より $x^2=1-\dfrac{1}{y}$ だから

$$V=\frac{\pi}{6}-\pi\int_1^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{6}-\pi\Big[y-\log|y|\Big]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{6}-\pi\left\{\left(\frac{3}{2}-1\right)-\log\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\left(\log\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\pi$$ …[答]

高松高等予備校