［1］

(1)　$a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}=2^n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　$\cdots$ ①

$n=1$ とすると　$a_2{}^2-a_1a_3=2^1$

$a_1=1$，$a_2=3$ より　$9-a_3=2$

よって　$a_3=7$

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0 \qquad \cdots (*)$$

$f(n)=a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n$ とおく

［1］　$f(1)=a_3-3a_2+2a_1=7-9+2=0$

(*) は $n=1$ のとき成り立つ

［2］　(*) が $n=k$ のとき成り立つと仮定する

つまり $a_{k+2}-3a_{k+1}+2a_k=0$ とすると

$$a_k=\frac{3a_{k+1}-a_{k+2}}{2}$$

① より　$a_{k+1}{}^2-a_ka_{k+2}=2^k$　であるから

$$a_{k+1}{}^2-\frac{3a_{k+1}-a_{k+2}}{2}\cdot a_{k+2}=2^k$$

$$2a_{k+1}{}^2-3a_{k+1}a_{k+2}+a_{k+2}{}^2=2^{k+1}$$

さらに ① より　$a_{k+2}{}^2-a_{k+1}a_{k+3}=2^{k+1}$

$a_{k+2}{}^2-2^{k+1}=a_{k+1}a_{k+3}$　より

$$2a_{k+1}{}^2-3a_{k+1}a_{k+2}+a_{k+1}a_{k+3}=0$$

$$a_{k+1}(a_{k+3}-3a_{k+2}+2a_{k+1})=0$$

各項は正の実数であるから $a_{k+1}>0$　つまり $a_{k+1}\neq 0$ より

$$a_{k+3}-3a_{k+2}+2a_{k+1}=0$$

よって　$f(k+1)=0$

(*) は $n=k+1$ のとき成り立つ

［1］,［2］より (*) はすべての自然数 n で成り立つ　…[答]

(2)　(1) より　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ を $a_{n+2}+\beta a_{n+1}=a_{n+1}+\beta a_n$ に代入して

$$3a_{n+1}-2a_n+\beta a_{n+1}=a_{n+1}+\beta a_n$$

$$(2+\beta)a_{n+1}-(2+\beta)a_n=0$$

$$(2+\beta)(a_{n+1}-a_n)=0$$

これがすべての n で成り立つとき，$a_1\neq a_2$ より

$2+\beta=0$　つまり　$\beta=-2$　…[答]

(3)　(2) より　$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は定数 $a_2-2a_1=1$

$$a_{n+1}-2a_n=1$$

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

これは $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ と変形できるから

数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=2$，公比 2 の等比数列より

$$a_n+1=2^n$$

したがって　$a_n=2^n-1$　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと

$$\mathrm{OP} = m\mathrm{AP}\ (m>1)$$

両辺正なので

$$\mathrm{OP}^2 = m^2\mathrm{AP}^2$$

$$X^2+Y^2 = m^2\{(X-1)^2+Y^2\}$$

$$(m^2-1)X^2-2m^2X+(m^2-1)Y^2+m^2=0$$

$m>1$ より，$m^2-1 \neq 0$ となり両辺を (m^2-1) で割ると

$$X^2-\frac{2m^2}{m^2-1}X+Y^2+\frac{m^2}{m^2-1}=0$$

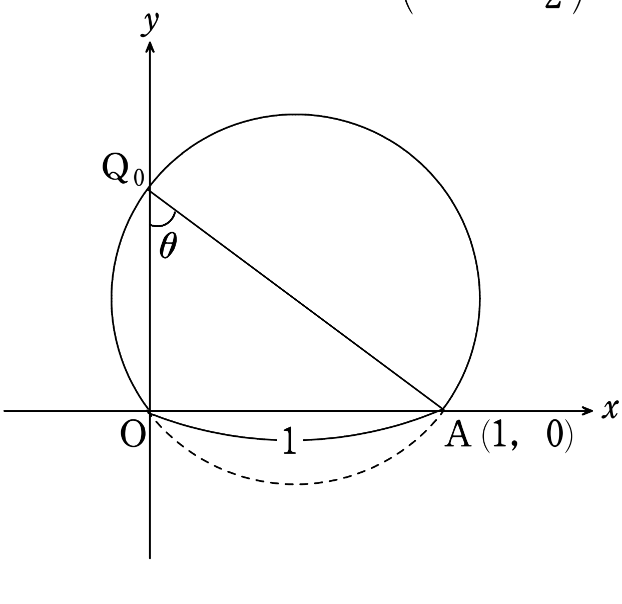
$$\left(X-\frac{m^2}{m^2-1}\right)^2+Y^2-\frac{m^4}{(m^2-1)^2}+\frac{m^2(m^2-1)}{(m^2-1)^2}=0$$

$$\left(X-\frac{m^2}{m^2-1}\right)^2+Y^2=\frac{m^2}{(m^2-1)^2}$$

よって，点 P の軌跡の円 C_1 の中心の座標と半径は，$m>1$ より

中心 $\left(\dfrac{m^2}{m^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{m}{m^2-1}$　…[答]

(2)　y 軸上の正の部分に $\angle\mathrm{OQ_0A}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる点 $\mathrm{Q_0}$ をとると



このとき，$\triangle\mathrm{OQ_0A}$ は $\angle\mathrm{AOQ_0}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{OQ_0A}=\theta$ なので

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OQ_0}\cdot\tan\theta$$

$$1=\mathrm{OQ_0}\cdot\tan\theta$$

$$\mathrm{OQ_0}=\frac{1}{\tan\theta}\quad(\because\ \tan\theta\neq 0)\quad \therefore\ \mathrm{Q_0}\left(0,\ \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

また

$$\mathrm{OA}=\mathrm{AQ_0}\cdot\sin\theta$$

$$1=\mathrm{AQ_0}\cdot\sin\theta$$

$$\mathrm{AQ_0}=\frac{1}{\sin\theta}\quad(\because\ \sin\theta\fallingdotseq 0)$$

これにより，$\triangle\mathrm{OQ_0A}$ の外接円は中心が $\mathrm{AQ_0}$ の中点で，半径 $\dfrac{1}{2}\mathrm{AQ_0}$ なので

$$\text{中心}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\tan\theta}\right),\ \text{半径}\ \frac{1}{2\sin\theta}$$

この円上の $y>0$ の部分に点 Q をとると，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{OQA}=\angle\mathrm{OQ_0A}=\theta$$

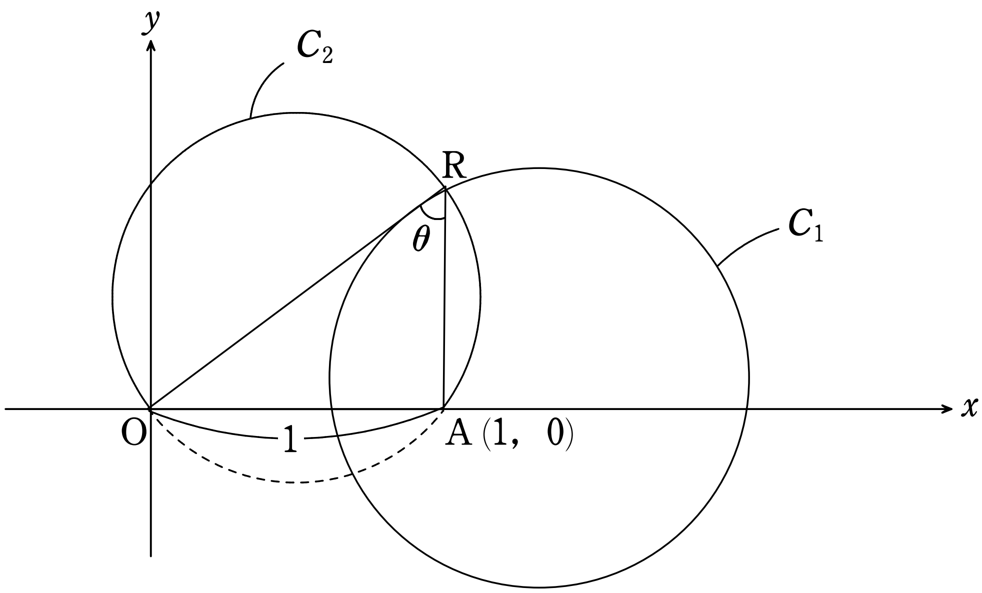
を満たすので，これが点 Q の軌跡の一部である。

同様に，y 軸上の負の部分に $\angle\mathrm{OQ_0A}=\theta$ となる点 $\mathrm{Q_0}$ をとっても点 Q の軌跡を考えられるが，これは軌跡の円の中心の y 座標が負になるので不適。

以上より，円 C_2 の中心の座標と半径は

$$\text{中心}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\tan\theta}\right),\ \text{半径}\ \frac{1}{2\sin\theta}$$ …[答]

(3)



(1)，(2) より，図をかくと図のようになる。

このとき，R は円 C_1，C_2 上にあるので

$$\angle\mathrm{ORA}=\theta,\ \mathrm{OR}=m\mathrm{AR}$$

を満たす。

AR$=k\,(k>0)$ とおくと

$$\mathrm{OR}=m\mathrm{AR}=mk$$

△OARにおいて，余弦定理より

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OR}^2+\mathrm{AR}^2-2\cdot\mathrm{OR}\cdot\mathrm{AR}\cdot\cos\angle\mathrm{ORA}$$

$$1=m^2k^2+k^2-2mk\cdot k\cdot\cos\theta$$

$$1=(m^2+1-2m\cos\theta)k^2$$

$$k^2=\frac{1}{m^2+1-2m\cos\theta}$$

よって，△OAR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot\mathrm{AR}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}mk\cdot k\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{m\cdot\sin\theta}{2}\cdot k^2$$

$$=\frac{m\sin\theta}{2(m^2+1-2m\cos\theta)}$$ …[答]

(4)　点 R から x 軸に下ろした垂線の足をH とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{RH}\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{RH}=\frac{2S}{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{m\sin\theta}{m^2+1-2m\cos\theta}$$

また △ORH において，$\angle\mathrm{OHR}=\frac{\pi}{2}$ より

$$\mathrm{OH}^2=\mathrm{OR}^2-\mathrm{RH}^2$$

$$=m^2k^2-\frac{m^2\sin^2\theta}{(m^2+1-2m\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{m^2(m^2+1-2m\cos\theta)-m^2\sin^2\theta}{(m^2+1-2m\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{m^4-2m^3\cos\theta+m^2\cos^2\theta}{(m^2+1-2m\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{m^2(m-\cos\theta)^2}{(m^2+1-2m\cos\theta)^2}$$

OH>0，$m-\cos\theta>0\,(\because m>1)$ より

$$\mathrm{OH}=\frac{m(m-\cos\theta)}{m^2+1-2m\cos\theta}$$

$$\therefore \mathrm{R}\left(\frac{m(m-\cos\theta)}{m^2+1-2m\cos\theta},\ \frac{m\sin\theta}{m^2+1-2m\cos\theta}\right)$$ …[答]

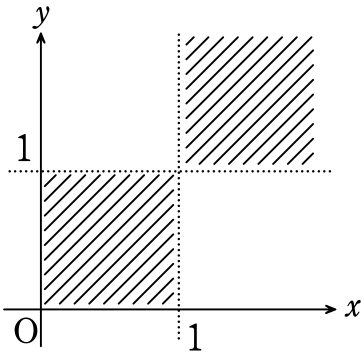
高松高等予備校

[3]

(1)　$\log_x y>0$

(i)　$0<x<1$ のとき $0<y<1$

(ii)　$x>1$ のとき $y>1$



点 $(x,\ y)$の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

(2)　$\log_x y=t$ とおくと $t\neq 0$

$$\log_x y+\frac{3}{\log_x y}-4<0$$

より　$t+\frac{3}{t}-4<0$

両辺に t^2 をかけると

$t^3-4t^2+3t<0$

$t(t-1)(t-3)<0$

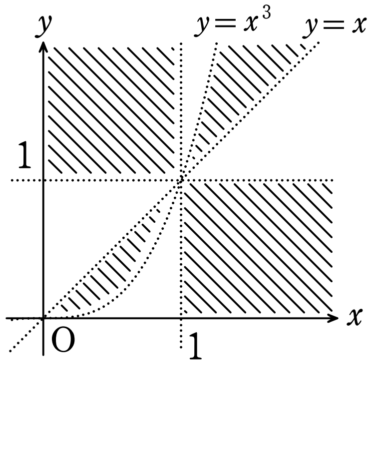
よって $t<0$，$1<t<3$

$\log_x y<0$，$1<\log_x y<3$

$\log_x y<\log_x 1$，$\log_x x<\log_x y<\log_x x^3$

(i)　$0<x<1$ のとき　$y>1$，$x>y>x^3$

(ii)　$1<x$ のとき $0<y<1$，$x<y<x^3$



点 $(x,\ y)$の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。　…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　点 P$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ における接線は

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

よって，法線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x-a\cos\theta)+b\sin\theta$$

$$=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}x-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\ \cdots\cdots①$$　…[答]

(2)　(1)と同様にして ℓ' の方程式を求めると

$$y=\frac{a\sin\theta'}{b\cos\theta'}x-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta'\ \cdots\cdots②$$

①，②の交点の x 座標は

$$\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}x-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta=\frac{a\sin\theta'}{b\cos\theta'}x-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta'$$

よって　$x=\dfrac{(a^2-b^2)(\sin\theta'-\sin\theta)\cos\theta'\cos\theta}{a\sin(\theta'-\theta)}$　…[答]

(3)　Rは ℓ 上の点だから x を①に代入して

$$y=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}\cdot\frac{(a^2-b^2)(\sin\theta'-\sin\theta)\cos\theta'\cos\theta}{a\sin(\theta'-\theta)}-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(\cos\theta'-\cos\theta)\sin\theta'\sin\theta}{b\sin(\theta'-\theta)}$$

$$\lim_{h\to0}x=\lim_{h\to0}\frac{(a^2-b^2)\{\sin(\theta+h)-\sin\theta\}\cos(\theta+h)\cos\theta}{a\sin h}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a}\lim_{h\to0}\frac{h}{\sin h}\cdot\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}\cdot\cos(\theta+h)\cos\theta$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta$$

同様に

$$\lim_{h\to0}y=\lim_{h\to0}\frac{(a^2-b^2)\{\cos(\theta+h)-\cos\theta\}\sin(\theta+h)\sin\theta}{b\sin h}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}\lim_{h\to0}\frac{h}{\sin h}\cdot\frac{\cos(\theta+h)-\cos\theta}{h}\cdot\sin(\theta+h)\sin\theta$$

$$=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta$$

よって　R$\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta,\ -\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta\right)$　…[答]

(4)　$a=2$，$b=1$ より

$$x=\frac{3}{2}\cos^3\theta,\quad \frac{dx}{d\theta}=-\frac{9}{2}\cos^2\theta\sin\theta$$

$$y=-3\sin^3\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=-9\sin^2\theta\cos\theta$$

点 R が描く曲線の長さを L とすると

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{81}{4}\cos^4\theta\sin^2\theta+81\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,d\theta$$

$u=1+3\sin^2\theta$ とおくと $\dfrac{du}{d\theta}=6\sin\theta\cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$
u	$\frac{7}{4}\to\frac{13}{4}$

$$L=\frac{9}{2}\int_{\frac{7}{4}}^{\frac{13}{4}}\frac{1}{6}\sqrt{u}\,du=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_{\frac{7}{4}}^{\frac{13}{4}}=\frac{13\sqrt{13}-7\sqrt{7}}{16}$$ …[答

高松高等予備校