

[1]

(1) 取り出した 2 個の球の色が異なるのは

- i) 袋 A から赤球, 袋 B から白球を取り出す
 - ii) 袋 A から白球, 袋 B から赤球を取り出す
- の 2 つの場合である。

$$\text{よって, } \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{6}{15} = \frac{8}{15} \quad \dots[\text{答}]$$

(2) 4 個の球の色がすべて同じであるのは

- i) 袋 A から赤球 2 個, 袋 B から赤球 2 個を取り出す
 - ii) 袋 A から白球 2 個, 袋 B から白球 2 個を取り出す
- の 2 つの場合である。

$$\text{よって, } \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{50} + \frac{2}{50} = \frac{3}{50} \quad \dots[\text{答}]$$

(3) 袋 A の白球の個数が 4 個になるのは

- i) 袋 A から赤球 2 個を取り出し, 袋 B から赤球 2 個を取り出し袋 A に入れる
- ii) 袋 A から赤球, 白球 1 個ずつ取り出し, 袋 B から赤球, 白球 1 個ずつ取り出し袋 A に入れる
- iii) 袋 A から白球 2 個を取り出し, 袋 B から白球 2 個を取り出し袋 A に入れる

の 3 つの場合である。

袋 B から取り出すとき, 袋 A からの 2 個が増えていることを考えて

$$\begin{aligned} & \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_7C_2} + \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} \\ &= \frac{10}{315} + \frac{96}{315} + \frac{36}{315} = \frac{142}{315} \quad \dots[\text{答}] \end{aligned}$$

高松高等予備校

[2]

(1) 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} = 2 \cdot 1$$

よって,

$$BC = 2 \sin \alpha, \quad CA = 2 \sin \beta, \quad AB = 2 \sin \gamma$$

したがって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin \gamma \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \end{aligned}$$

…[答]

(2) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ より

$$\gamma = \frac{5}{6}\pi - \beta$$

(1)より

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \beta \sin \left(\frac{5}{6}\pi - \beta \right) \\ &= \sin \beta \sin \left(\frac{5}{6}\pi - \beta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{5}{6}\pi - \cos \left(2\beta - \frac{5}{6}\pi \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos \left(2\beta - \frac{5}{6}\pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$0 < \beta < \frac{5}{6}\pi \text{ より } -\frac{5}{6}\pi < 2\beta - \frac{5}{6}\pi < \frac{5}{6}\pi$$

したがって,

$$2\beta - \frac{5}{6}\pi = 0 \text{ のとき,}$$

$$\text{ようするに, } \beta = \frac{5}{12}\pi, \quad \gamma = \frac{5}{12}\pi \text{ のとき}$$

$$S \text{ は最大値 } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

…[答]

(3) $\alpha = \beta$ より

$$\gamma = \pi - 2\alpha$$

内接円の半径が r より

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA)r = S$$

(1)より

$$\frac{1}{2}(2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\gamma)r = 2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$(2\sin\alpha + \sin(\pi - 2\alpha))r = 2\sin^2\alpha \sin(\pi - 2\alpha)$$

$$(2\sin\alpha + \sin 2\alpha)r = 2\sin^2\alpha \sin 2\alpha$$

$$(2\sin\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha)r = 4\sin^3\alpha \cos\alpha$$

$$\sin\alpha(1 + \cos\alpha)r = 2\sin\alpha(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より

$$r = 2(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$

$$= -2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha$$

$$= -2\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 < \cos\alpha < 1$ より

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ のとき

r は最大値 $\frac{1}{2}$

…[答]

高松高等予備校

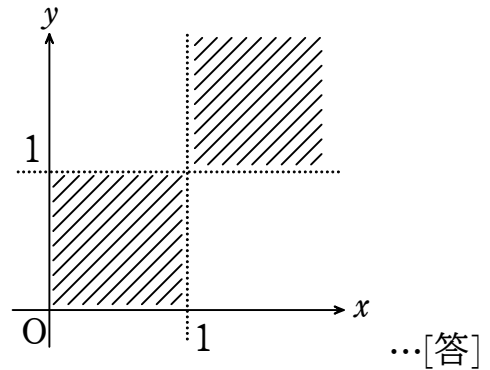
[3]

(1) $\log_x y > 0$

(i) $0 < x < 1$ のとき $0 < y < 1$

(ii) $x > 1$ のとき $y > 1$

点 (x, y) の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。



(2) $\log_x y = t$ とおくと $t \neq 0$

$$\log_x y + \frac{3}{\log_x y} - 4 < 0$$

より $t + \frac{3}{t} - 4 < 0$

両辺に t^2 をかけると

$$t^3 - 4t^2 + 3t < 0$$

$$t(t-1)(t-3) < 0$$

よって $t < 0$, $1 < t < 3$

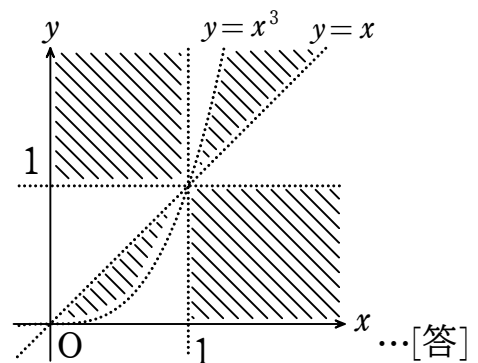
$$\log_x y < 0, \quad 1 < \log_x y < 3$$

$$\log_x y < \log_x 1, \quad \log_x x < \log_x y < \log_x x^3$$

(i) $0 < x < 1$ のとき $y > 1$, $x > y > x^3$

(ii) $1 < x$ のとき $0 < y < 1$, $x < y < x^3$

点 (x, y) の範囲は図の斜線部分。
ただし境界線は含まない。



[4]

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6ax$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 6a$$

$$= 3(x^2 + 2x - 2a)$$

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 1 + 2a \leq 0$$

$$a \leq -\frac{1}{2}$$

…[答]

(2) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ より

$$\frac{1}{4} + 1 - 2a = 0$$

$$a = \frac{5}{8}$$

このとき $f'(x) = \frac{3}{4}(2x-1)(2x+5)$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	$-\frac{5}{2}$	…	$\frac{1}{2}$	…
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって, $a = \frac{5}{8}$

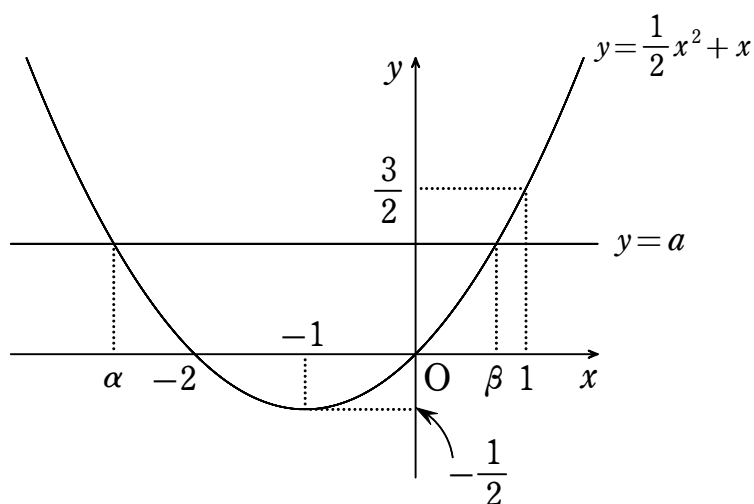
…[答]

(3) $a > -\frac{1}{2}$ のとき $f'(x) = 0$ の実数解を α, β とおく ($\alpha < \beta$)

α, β は $x^2 + 2x - 2a = 0$ の解より

$$\frac{1}{2}x^2 + x = a$$

$y = \frac{1}{2}x^2 + x$ と $y = a$ の交点の x 座標を調べる。



(i) $a \leq -\frac{1}{2}$ のとき, $y = f(x)$ は単調増加

最小値 $f(-1) = 6a + 2$

…[答]

(ii) $-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ のとき, 最小値は $f(\beta)$

ここで

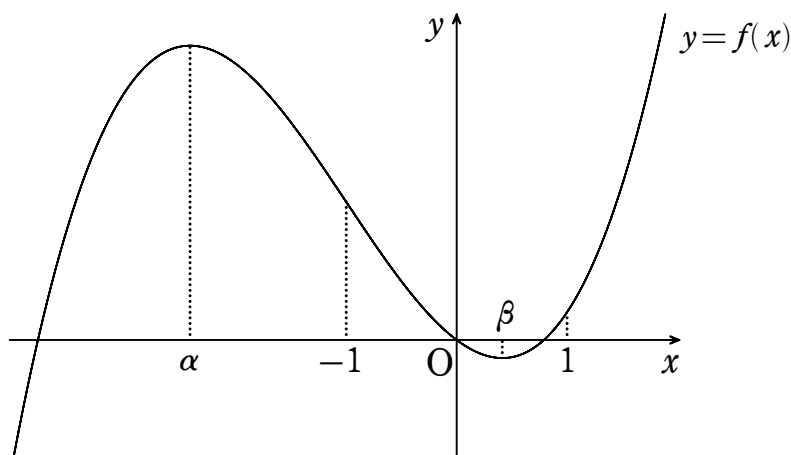
$$f(x) = \frac{1}{3} f'(x)(x+1) - 2(2a+1)x + 2a$$

より $f(\beta) = -2(2a+1)\beta + 2a$

$\beta = -1 + \sqrt{1+2a}$ を代入

$$f(\beta) = 6a + 2 - 2(2a+1)\sqrt{2a+1}$$

…[答]



(iii) $a \geq \frac{3}{2}$ のとき, $-1 \leq x \leq 1$ において $y = f(x)$ は単調減少

最小値 $f(1) = 4 - 6a$

…[答]