数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　「A」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率は，「AAAA」をひとかたまりと考えて

$$\frac{4!\times 9!}{12!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{1}{55}$$ ……[答]

(2)　どの 2 枚の「A」のカードも連続して並ばないのは

「A」以外の 8 枚のカードを並べておいて，その間または両端の 9 か所のうち 4 か所に「A」を入れることを考えて，求める確率は

$$\frac{8!\times {}_9P_4}{12!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{14}{55}$$ ……[答]

(3)　「A」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率 p_1 は (1) より $p_1=\frac{1}{55}$

「A」のカードが 3 枚だけ連続して並ぶ場合，「A」以外の 8 枚のカードを並べておいて，その間または両端の 9 か所のうち，1 か所に「AAA」を入れ，残りの 8 か所のうち 1 か所に「A」を入れることを考えて，その確率 p_2 は

$$p_2=\frac{8!\times {}_9C_1\times {}_8C_1\times 4!}{12!}=\frac{8}{55}$$

連続した並びがある確率 p_3 は (2) の余事象の確率で

$$p_3=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$$

求める確率は，$p_3-p_1-p_2=\frac{41}{55}-\frac{1}{55}-\frac{8}{55}=\frac{32}{55}$ …[答]

(別解)

(i)「A」2 枚の連続した並びが 2 回生じる場合

「A」以外の 8 枚のカードを並べておいて，その間または両端の 9 か所のうち，2 か所に「AA」を入れることを考えて，その確率は

$$\frac{8!\times {}_9C_2\times 4!}{12!}=\frac{36\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{4}{55}$$

(ii)「A」2 枚の連続した並びが 1 回だけ生じる場合

「A」以外の 8 枚のカードを並べておいて，その間または両端の 9 か所のうち，1 か所に「AA」を入れ，残りの 8 か所のうち 2 か所に A

を入れることを考えて

$$\frac{8!\times{}_9C_1\times{}_8C_2\times4!}{12!}=\frac{9\cdot28\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10\cdot9}=\frac{28}{55}$$

(i), (ii) は互いに排反であるから求める確率は

$$\frac{4}{55}+\frac{28}{55}=\frac{32}{55}$$ ……[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　$b^2=1$, $c^2=4$ で $b>0$, $c>0$ より

$$b=1,\ c=2$$

$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$ であるから，余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC}&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\frac{1+4-(5-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2\cdot1\cdot2}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

…[答]

(2)　$$\begin{aligned}\sin^2\angle\mathrm{BAC}&=1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}\\&=1-\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2\\&=1-\frac{8+4\sqrt{3}}{16}\\&=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}\\&=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2\end{aligned}$$

$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ より

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

三角形ABCの面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{BAC}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

…[答]

(3)　加法定理より

$$\begin{aligned}\cos15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\&=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

よって　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\cos 15^\circ$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ であるから

$\angle\mathrm{BAC}=15^\circ$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$　$\cdots(*)$　とする

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=1$，$\dfrac{b_1}{c_1}=1$ なので $(*)$ は成立

(ii)　$n=k$ のとき

$(*)$ が成立，すなわち $a_k=\dfrac{b_k}{c_k}$ とする

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{2+a_k}\\&=\frac{1}{2+\dfrac{b_k}{c_k}}\\&=\frac{c_k}{b_k+2c_k}\\&=\frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}\end{aligned}$$

となり，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成立する

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ は成立する　　…[証明終]

(2)　数列 $\{\alpha b_n-c_n\}$ が公比 β の等比数列とすると

$$\begin{aligned}\alpha b_{n+1}-c_{n+1}&=\beta(\alpha b_n-c_n)\\&=\alpha\beta b_n-\beta c_n \quad\cdots①\end{aligned}$$

一方　$\alpha b_{n+1}-c_{n+1}=\alpha c_n-(b_n+2c_n)$

$$=-b_n+(\alpha-2)c_n \quad\cdots②$$

①，② より

$$\begin{cases}\alpha\beta=-1 & \cdots③\\ -\beta=\alpha-2 & \therefore\ \alpha+\beta=2 \quad\cdots④\end{cases}$$

③，④ より α，β は $t^2-2t-1=0$ の解である

よって　$t=1\pm\sqrt{2}$ なので

$(\alpha,\ \beta)=(1\pm\sqrt{2},\ 1\mp\sqrt{2})$　(複号同順)

したがって　$\alpha=1\pm\sqrt{2}$　　…[答]

(3)　(2) より数列 $\{\alpha b_n-c_n\}$ は

初項 $\alpha b_1 - c_1 = \alpha - 1$，公比 β の等比数列

よって　$\alpha b_n - c_n = (\alpha - 1)\beta^{n-1}$

$\alpha = 1+\sqrt{2}$ のとき $\beta = 1-\sqrt{2}$ より

$$(1+\sqrt{2})b_n - c_n = \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{n-1} \qquad \cdots①$$

$\alpha = 1-\sqrt{2}$ のとき $\beta = 1+\sqrt{2}$ より

$$(1-\sqrt{2})b_n - c_n = -\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{n-1} \qquad \cdots②$$

①−② より

$$2\sqrt{2}\,b_n = \sqrt{2}\left\{(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1}}{2}$$

また　$c_n = b_{n+1}$

$$= \frac{(1-\sqrt{2})^{n} + (1+\sqrt{2})^{n}}{2}$$

このとき　$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$

$$= \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1}}{(1-\sqrt{2})^{n} + (1+\sqrt{2})^{n}}$$

以上より

$$a_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1}}{(1-\sqrt{2})^{n} + (1+\sqrt{2})^{n}}$$

$$b_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1}}{2}$$

$$c_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n} + (1+\sqrt{2})^{n}}{2}$$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　C： $y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$

a について整理すると

$y=a(x^2+2x)+x^3+2x^2+2$　　… ①

$\begin{cases} x^2+2x=0 & \cdots ② \\ y=x^3+2x^2+2 & \cdots ③ \end{cases}$ のとき①は任意の a について成り立つ

②より $x(x+2)=0$ から $x=0,\ -2$

③より $x=0$ のとき $y=2$

$x=-2$ のとき $y=2$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 2),\ (-2,\ 2)$のとき①は常に成り立つから，$a$ がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点 $(0,\ 2), (-2,\ 2)$ を通る

…[答]

(2)　A$(0,\ 2)$, B$(-2,\ 2)$から，直線 L は $y=2$

Cと L の共有点の x 座標は

$$x^3+(a+2)x^2+2ax+2=2$$

$$x\{x^2+(a+2)x+2a\}=0$$

$$x(x+2)(x+a)=0$$

$x=0,\ -2,\ -a$

この 3 点がすべて線分 AB 上にあるのは

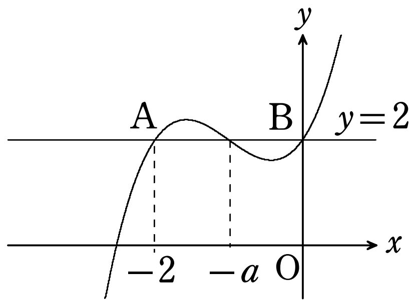
$-2<-a<0$　つまり　$0<a<2$ のときである　　…[答]

(3)　(2)より Cと L は右図となり，

$-2\leqq x\leqq -a$ のとき $y\geqq 2$

$-a\leqq x\leqq 0$ のとき $y\leqq 2$

である



求める面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}dx+\int_{-a}^{0}\{-x^3-(a+2)x^2-2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_{-2}^{-a}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3-ax^2\right]_{-a}^{0}$$

$$=2\left\{\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3\right\}-\left\{4-\frac{8}{3}(a+2)+4a\right\}$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0$ となるのは $a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$0<a<2$ における増減表は次のようになる

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$	／	$-$	0	$+$	／
$S(a)$	／	↘		↗	／

よって S(a)は $a=1$ のとき最小となり，最小値は

$$S(1)=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$$ …[答]

高松高等予備校