数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

XとYが対戦して，Xが勝つ確率を $p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X})$ と表すこととすると

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$$

$$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})=1-p,\quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=p$$

$$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})=1-p,\quad p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})=p$$

である

(1)　1試合で優勝者が決定することはないから

$a_1=0$ …[答]

2試合で決定するのは，Aが2連勝するか，Bが2連勝するときであるから

$$a_2=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})+p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})$$

$$=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)$$

$$=1-p$$ …[答]

3試合目に優勝者が決まるのは，必ずCであり

$$a_3=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})+p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$$

$$=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p^2$$

$$=p^2$$ …[答]

4試合目の優勝者はAかBであるから

$$a_4=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$
$$+p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$$

$$=\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}p(1-p)$$ …[答]

(2)　$3k$ 回目に優勝者が決まるのは，$k\geqq 2$ のとき

勝者が(ACB)であることが $k-1$ 回繰り返されて最後の3回の勝者が(ACC)となる場合，または，勝者が(BCA)であることが $k-1$ 回繰り返されて最後の3回の勝者が(BCC)となる場合であるから

$$a_{3k}=\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\times\frac{1}{2}p^2+\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\times\frac{1}{2}p^2$$

$$= p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$$

これは，$k=1$ のときも成り立つ。

よって

$$a_{3k} = p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$$ …[答]

(3)　Cが優勝する確率は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$$

$0<p<1$ より，$0<\frac{1}{2}p(1-p)<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = \frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}$$

$$= \frac{2p^2}{2-p+p^2}$$ …[答]

(4)　Cが優勝する確率が $\frac{1}{3}$ 以上となるのは

$$\frac{2p^2}{2-p+p^2} \geqq \frac{1}{3}$$

$2-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ より

$$6p^2 \geqq 2-p+p^2$$

$$5p^2+p-2 \geqq 0$$

$p>0$ より

$$p \geqq \frac{-1+\sqrt{41}}{10}$$

すなわち

$$\frac{N}{100} \geqq \frac{-1+\sqrt{41}}{10}$$

$$N \geqq 10(-1+\sqrt{41})$$

ここで，$6.4=40.96$，$6.5=42.25$ であることから

$$6.4<\sqrt{41}<6.5$$

$$54<10(-1+\sqrt{41})<55$$

よって，求める N の最小値は $N=55$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　C： $y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$

a について整理すると

$y=a(x^2+2x)+x^3+2x^2+2$　… ①

$\begin{cases} x^2+2x=0 & \cdots ② \\ y=x^3+2x^2+2 & \cdots ③ \end{cases}$ のとき①は任意の a について成り立つ

②より $x(x+2)=0$ から $x=0,\ -2$

③より $x=0$ のとき $y=2$

　　　$x=-2$ のとき $y=2$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 2),\ (-2,\ 2)$のとき①は常に成り立つから，$a$ がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点 $(0,\ 2),(-2,\ 2)$ を通る

…[答]

(2)　A $(0,\ 2)$，B$(-2,\ 2)$から，直線 L は $y=2$

Cと L の共有点の x 座標は

$x^3+(a+2)x^2+2ax+2=2$

$x\{x^2+(a+2)x+2a\}=0$

$x(x+2)(x+a)=0$

$x=0,\ -2,\ -a$

この 3 点がすべて線分 AB 上にあるのは

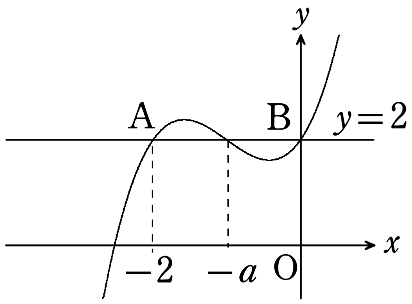
$-2<-a<0$　つまり　$0<a<2$ のときである　…[答]

(3)　(2)より Cと L は右図となり，

$-2\leqq x\leqq -a$ のとき $y\geqq 2$

$-a\leqq x\leqq 0$ のとき $y\leqq 2$

である



求める面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}dx+\int_{-a}^{0}\{-x^3-(a+2)x^2-2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_{-2}^{-a}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3-ax^2\right]_{-a}^{0}$$

$$=2\left\{\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3\right\}-\left\{4-\frac{8}{3}(a+2)+4a\right\}$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0$ となるのは $a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$0<a<2$ における増減表は次のようになる

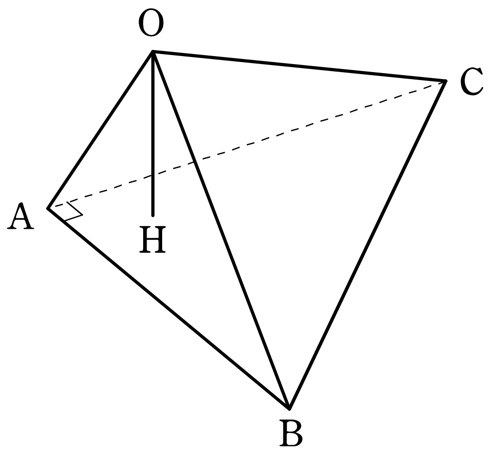
a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$	／	$-$	0	$+$	／
$S(a)$	／	↘		↗	／

よって S(a)は $a=1$ のとき最小となり，最小値は

$$S(1) = -\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$



(1)　点 H が 3 点A，B，C が定める平面上に存在するとき

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s，t は実数) が成り立つ。

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$
$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

$1-s-t=u$ (u は実数) とおくと，$u+s+t=1$ が成り立つ。

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{8}\vec{b}+\dfrac{1}{8}\vec{c}$ より，$u=\dfrac{3}{4}$，$s=\dfrac{1}{8}$，$t=\dfrac{1}{8}$ とおくと

$u+s+t=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=1$ であるから

点 H は 3 点A，B，C が定める平面上に存在する。　…[証明終]

(2)　$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ より

$$\ell^2=\ell^2+\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{8}\ell^2$$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$ より

$$(\sqrt{2}\,\ell)^2=\ell^2+\ell^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$\left|\overrightarrow{CA}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

$$\ell^2=\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2+\ell^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{8}\ell^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left|\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{9}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{64}|\vec{b}|^2+\frac{1}{64}|\vec{c}|^2+\frac{3}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{32}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{3}{16}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{9}{16}\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2+\frac{1}{64}\ell^2+\frac{1}{64}\ell^2+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{8}\ell^2+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{8}\ell^2$$

$$=\frac{7}{32}\ell^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{\sqrt{14}}{8}\ell$$ …[答]

(3) $$\cos\angle\mathrm{OHB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HO}}||\overrightarrow{\mathrm{HB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{64}(6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(6\vec{a}-7\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\frac{1}{64}(36|\vec{a}|^2-7|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-36\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{c}+12\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{64}\left(36\cdot\frac{1}{4}\ell^2-7\ell^2+\ell^2-36\cdot\frac{1}{8}\ell^2+12\cdot\frac{1}{8}\ell^2\right)$$

$$=\frac{1}{64}\left(9-6-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\right)\ell^2$$

$$=0$$

$\therefore\quad \cos\angle\mathrm{OHB}=0$

よって　$\angle\mathrm{OHB}=90^\circ$ …[答]

(4) $\mathrm{AC}:\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\ell:\ell:\sqrt{2}\ell=1:1:\sqrt{2}$ より　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\ell\cdot\ell=\frac{1}{2}\ell^2$$

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ell^2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}\ell$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{48}\ell^3$$ …[答]

$\boxed{4}$

(1)　$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ より

$$f(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$$

よって

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

これにより，$-1<x<1$ における $f'(x)$ の増減は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	極小	↗	

よって，$-1<x<1$ における $f'(x)$ の最小値は

$$f'(0)=1-0-1$$

$$=0$$

以上より，$-1<x<1$ のとき $f'(x)\geqq 0$　…[証明終]

(2)　(1)より $f(x)$ は単調増加となる。

ここで

$$f(0)=0$$

より

$-1<x<0$ のとき $f(x)<0$

$0<x<1$ のとき $f(x)>0$

となる。したがって

$-1<x<0$ のとき $\dfrac{f(x)}{x}>0$

$0<x<1$ のとき $\dfrac{f(x)}{x}>0$

以上より，$-1<x<1,\ x\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{f(x)}{x}>0$　…[証明終]

(3)　(2)より，$-1<x<1,\ x\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{f(x)}{x}>0$

ここで，$n\geqq 2$ より

$$0<\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{2}$$

よって，$x=\frac{1}{n}$ を代入して

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}>0$$

$$nf\left(\frac{1}{n}\right)>0$$

$$n\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}>0$$

$$n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)>0$$

$$\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

底 e は 1 より大きいので

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n>\frac{n-1}{n} \quad \cdots①$$

また，$n\geqq2$ より

$$-\frac{1}{2}\leqq-\frac{1}{n}<0$$

よって，$x=-\frac{1}{n}$ を代入して

$$\frac{f\left(-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}>0$$

$$-nf\left(-\frac{1}{n}\right)>0$$

$$nf\left(-\frac{1}{n}\right)<0$$

$$n\left\{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}<0$$

$$n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

$$\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < -\log\frac{n+1}{n}$$

$$\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < \log\frac{n}{n+1}$$

底 e は 1 より大きいので

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < \frac{n}{n+1}$$

両辺に $\dfrac{n^2-1}{n^2}(>0)$ をかけると

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} \quad \cdots②$$

①，②より

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

…[証明終]

高松高等予備校