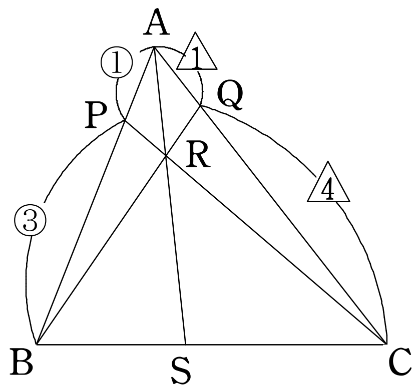
[1]



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{5}\vec{b}$ …[答]

(2) 点 R は直線 BQ 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\ (\,t\text{ は実数})$$

$$=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{5}\vec{b} \qquad \cdots①$$

点 R は直線 CP 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (\,s\text{ は実数})$$

$$=\frac{1-s}{4}\vec{a}+s\vec{b} \qquad \cdots②$$

と表せる。

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，①，②より

$$\begin{cases} 1-t=\dfrac{1-s}{4} \\ \dfrac{t}{5}=s \end{cases}$$

これを解いて　$s=\dfrac{3}{19}$，$t=\dfrac{15}{19}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{4}{19}\vec{a}+\dfrac{3}{19}\vec{b}$ …[答]

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ (k は実数)とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{4}{19}k\vec{a}+\frac{3}{19}k\vec{b}$$

点 S は直線 BC 上にあるので

$$\frac{4}{19}k+\frac{3}{19}k=1 \text{ より } k=\frac{19}{7}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$ …[答]

(3)　(2)より　AR ：RS=7：12，BS：SC=3：4

$$\triangle\mathrm{RBS}=\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{AS}}\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{19}\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{36}{133}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{133}{36}\triangle\mathrm{RBS}$

したがって　$\frac{133}{36}$ 倍 …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)
$$b_{n+1}=\frac{-3}{a_{n+1}-1}=\frac{-3}{\dfrac{-3a_n+2}{a_n-2}-1}$$
$$=\frac{-3a_n+6}{-3a_n+2-a_n+2}=\frac{-3a_n+6}{-4a_n+4}$$
$$=\frac{3a_n-6}{4(a_n-1)}=\frac{3(a_n-1)-3}{4(a_n-1)}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{4(a_n-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{a_n-1}+\frac{3}{4}$$

よって，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{3}{4}$ …[答]

(2) (1) より，$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{4}(b_n-1)$ と変形できるから

数列 $\{b_n-1\}$ は

初項 $b_1-1=\dfrac{-3}{a_1-1}-1=\dfrac{-3}{4-1}-1=-1-1=-2$

公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となっている

$$b_n-1=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=1-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ …[答]

(3) $b_n>\dfrac{2021}{2022}$ のとき，$1-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}>\dfrac{2021}{2022}$

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<1-\frac{2021}{2022}=\frac{1}{2022}=\frac{1}{2\cdot1011}$$
$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{1011}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}<\frac{1}{1011}$$
$$\frac{1}{2^{2n-4}}<\frac{1}{1011}$$
$$2^{2n-4}>1011$$

2^{2n-4} は単調に増加して，$2^9=512$，$2^{10}=1024$ より

最小の自然数は $2n-4=10$ つまり $n=7$ のとき …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$f(x)=x^3-6x^2$ より

$$f'(x)=3x^2-12x$$

曲線 C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線の方程式は

$$y-(p^3-6p^2)=(3p^2-12p)(x-p)$$

すなわち

$$y=(3p^2-12p)x-2p^3+6p^2 \cdots ①$$ …[答]

(2)　$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると，　$x=0,\ 4$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

よって，　$x=0$ のとき極大値 0
　　　　　$x=4$ のとき極小値 -32 …[答]

(3)　① が $(4,\ k)$ を通るとき

$$k=4(3p^2-12p)-2p^3+6p^2$$

すなわち

$$k=-2p^3+18p^2-48p$$

$g(p)=-2p^3+18p^2-48p$ とおく。

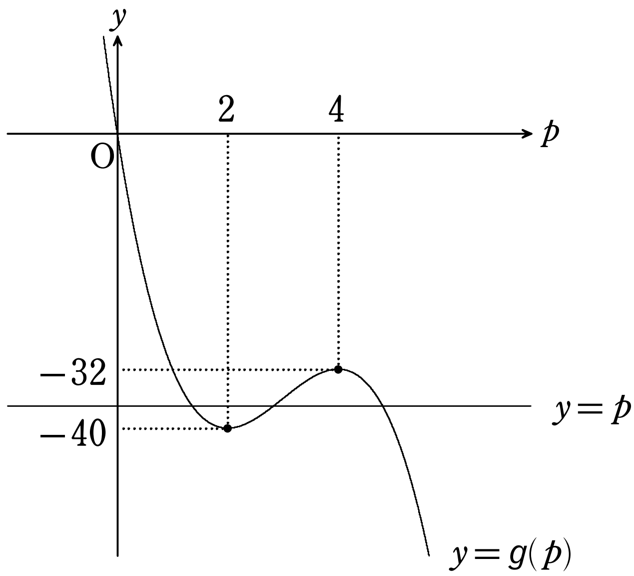
点 $(4,\ k)$ から曲線 C 上の異なる 3 点それぞれに接線が引けるのは，p についての方程式 $k=g(p)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，すなわち曲線 $y=g(p)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつときである。

$$\begin{aligned} g'(p)&=-6p^2+36p-48 \\ &=-6(p^2-6p+8) \\ &=-6(p-2)(p-4) \end{aligned}$$

$g'(p)=0$ とすると，　$p=2,\ 4$

$g(p)$ の増減表は次のようになる。

p	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(p)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(p)$	$\searrow$	-40	$\nearrow$	-32	$\searrow$



したがって，求める定数 k の値の範囲は

$-40<k<-32$ …[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$f(x)=-x^2+2x$ とすると，　$f'(x)=-2x+2$

C 上の点 $(0,\ 0)$ における接線 l の方程式は

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

$$y-0=2(x-0)$$

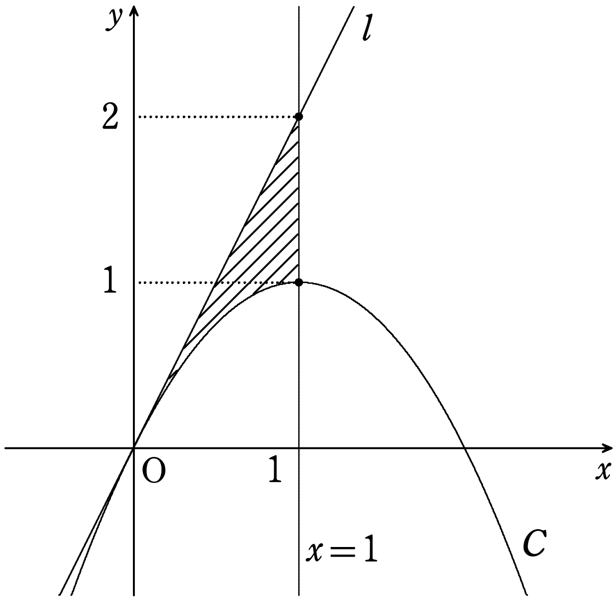
すなわち

$$y=2x$$ …[答]

(2)　$y=-x^2+2x$

$$=-(x-1)^2+1$$

図形 D は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



…[答]

図形 D の面積 S は

$$S=\int_0^1\{2x-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$ …[答]

(3)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_1 は

$$V_1=\pi\int_0^1\{(2x)^2-(-x^2+2x)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^1(-x^4+4x^3)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{5}x^5+x^4\right]_0^1$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{5}+1\right)$$

$$=\frac{4}{5}\pi$$

…[答]

(4)　$y=-x^2+2x$ より

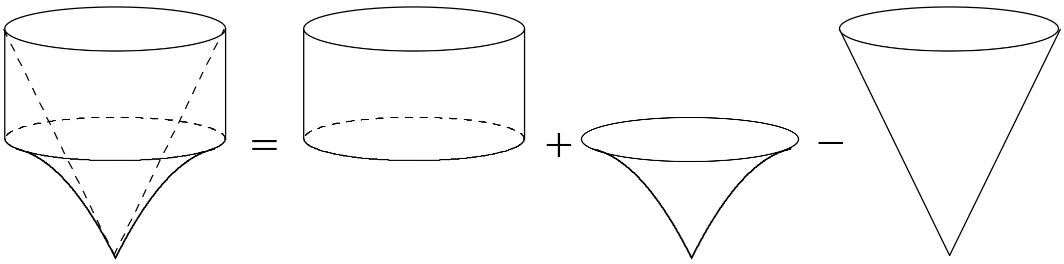
$x^2-2x+y=0$

$x\leqq 1$ のとき

$x=1-\sqrt{1-y}$

D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_2 は,

底面の半径 1，高さ 1 の円柱の体積と曲線 $x=1-\sqrt{1-y}$ $(0\leqq y\leqq 1)$ を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を合わせたものから底面の半径 1，高さ 2 の円錐の体積を引いたものである。



$$V_2=\pi\cdot 1^2\cdot 1+\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 2$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\int_0^1(2-y-2\sqrt{1-y})dy$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\left[2y-\frac{1}{2}y^2+\frac{4}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\left\{\left(2-\frac{1}{2}+0\right)-\left(0-0+\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

…[答]