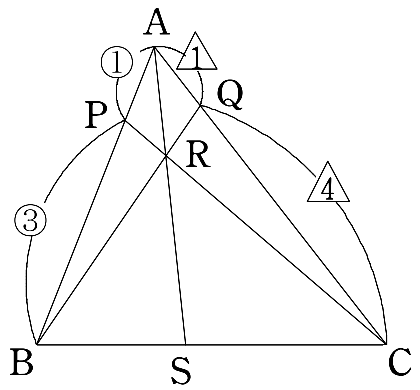
[1]



(1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{5}\vec{b}$ …[答]

(2) 点 R は直線 BQ 上にあるので

$\overrightarrow{AR}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AQ}$ (t は実数)

$=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{5}\vec{b}$ …①

点 R は直線 CP 上にあるので

$\overrightarrow{AR}=(1-s)\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AC}$ (s は実数)

$=\dfrac{1-s}{4}\vec{a}+s\vec{b}$ …②

と表せる。

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから，①，②より

$$\begin{cases} 1-t=\dfrac{1-s}{4} \\ \dfrac{t}{5}=s \end{cases}$$

これを解いて　$s=\dfrac{3}{19}$，$t=\dfrac{15}{19}$

よって　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{4}{19}\vec{a}+\dfrac{3}{19}\vec{b}$ …[答]

$\overrightarrow{AS}=k\overrightarrow{AR}$ (k は実数)とすると

$\overrightarrow{AS}=\dfrac{4}{19}k\vec{a}+\dfrac{3}{19}k\vec{b}$

点 S は直線 BC 上にあるので

$\dfrac{4}{19}k+\dfrac{3}{19}k=1$ より $k=\dfrac{19}{7}$

よって　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$　…[答]

(3)　(2)より　AR：RS=7：12，BS：SC=3：4

$$\triangle RBS=\frac{BS}{BC}\cdot\frac{RS}{AS}\triangle ABC$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{19}\triangle ABC$$

$$=\frac{36}{133}\triangle ABC$$

よって　$\triangle ABC=\dfrac{133}{36}\triangle RBS$

したがって　$\dfrac{133}{36}$ 倍　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　$$b_{n+1}=\frac{-3}{a_{n+1}-1}=\frac{-3}{\dfrac{-3a_n+2}{a_n-2}-1}$$

$$=\frac{-3a_n+6}{-3a_n+2-a_n+2}=\frac{-3a_n+6}{-4a_n+4}$$

$$=\frac{3a_n-6}{4(a_n-1)}=\frac{3(a_n-1)-3}{4(a_n-1)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{4(a_n-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{a_n-1}+\frac{3}{4}$$

よって，　$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{3}{4}$　…[答]

(2)　(1) より，　$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{4}(b_n-1)$ と変形できるから

数列 $\{b_n-1\}$ は

初項 $b_1-1=\dfrac{-3}{a_1-1}-1=\dfrac{-3}{4-1}-1=-1-1=-2$

公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となっている

$$b_n-1=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって，　$b_n=1-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　…[答]

(3)　$b_n>\dfrac{2021}{2022}$ のとき，　$1-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}>\dfrac{2021}{2022}$

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<1-\frac{2021}{2022}=\frac{1}{2022}=\frac{1}{2\cdot 1011}$$

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{1011}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}<\frac{1}{1011}$$

$$\frac{1}{2^{2n-4}}<\frac{1}{1011}$$

$$2^{2n-4}>1011$$

2^{2n-4} は単調に増加して，　$2^9=512$，　$2^{10}=1024$ より

最小の自然数は $2n-4=10$ つまり $n=7$ のとき …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$ なので

頂点の座標は　$\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+a\right)$　…[答]

(2)　x 軸と異なる 2 点で交わるには，放物線 $y=f(x)$ が下に凸だから

$-\dfrac{a^2}{4}+a<0$ であればよい。

$a^2-4a=a(a-4)>0$　より

$a<0$　または　$4<a$　…[答]

(3)　(2) より

(i)　$0<a<4$ のとき

$y=f(x)$ は下に凸で，x 軸と共有点を持たないので

解はすべての実数

(ii)　$a=0$ のとき

$f(x)=x^2$ より　$x=0$ 以外のすべての実数

(iii)　$a=4$ のとき

$f(x)=(x-2)^2$ より　$x=2$ 以外のすべての実数

(iv)　$a<0$ または $4<a$ のとき

$f(x)=0$ の解が　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$　なので

$x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$　または　$\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}<x$

…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$f(x)=x^3-6x^2$ より

$$f'(x)=3x^2-12x$$

曲線 C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線の方程式は

$$y-(p^3-6p^2)=(3p^2-12p)(x-p)$$

すなわち

$$y=(3p^2-12p)x-2p^3+6p^2 \cdots ①$$

…[答]

(2)　$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると，　$x=0,\ 4$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

よって，　$x=0$ のとき極大値 0

　　　　　$x=4$ のとき極小値 -32

…[答]

(3)　① が $(4,\ k)$ を通るとき

$$k=4(3p^2-12p)-2p^3+6p^2$$

すなわち

$$k=-2p^3+18p^2-48p$$

$g(p)=-2p^3+18p^2-48p$ とおく。

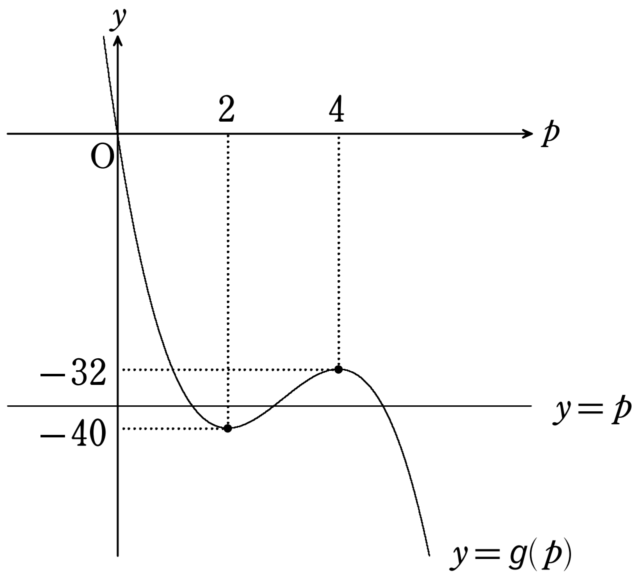
点 $(4,\ k)$ から曲線 C 上の異なる 3 点それぞれに接線が引けるのは，p についての方程式 $k=g(p)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，すなわち曲線 $y=g(p)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつときである。

$$\begin{aligned} g'(p)&=-6p^2+36p-48 \\ &=-6(p^2-6p+8) \\ &=-6(p-2)(p-4) \end{aligned}$$

$g'(p)=0$ とすると，　$p=2,\ 4$

$g(p)$ の増減表は次のようになる。

p	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(p)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(p)$	$\searrow$	-40	$\nearrow$	-32	$\searrow$



したがって，求める定数 k の値の範囲は

$-40<k<-32$ …[答]

高松高等予備校

[5]

(1)　$f(x)=-x^2+2x$ とすると，　$f'(x)=-2x+2$

C 上の点 (0,　0) における接線 l の方程式は

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-0=2(x-0)$

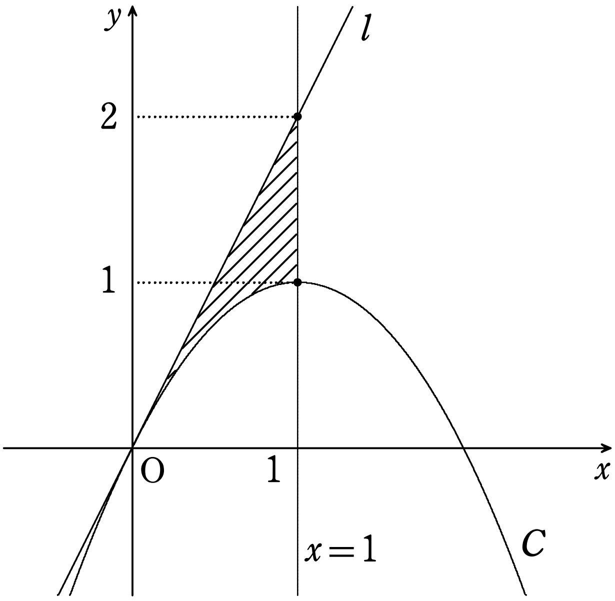
すなわち

$y=2x$ …[答]

(2)　$y=-x^2+2x$

$=-(x-1)^2+1$

図形 D は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



…[答]

図形 D の面積 S は

$$S=\int_0^1\{2x-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2 dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$ …[答]

(3)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_1 は

$$V_1=\pi\int_0^1\{(2x)^2-(-x^2+2x)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^1(-x^4+4x^3)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{5}x^5+x^4\right]_0^1$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{5}+1\right)$$

$$=\frac{4}{5}\pi$$

…[答]

(4)　$y=-x^2+2x$ より

$x^2-2x+y=0$

$x\leqq 1$ のとき

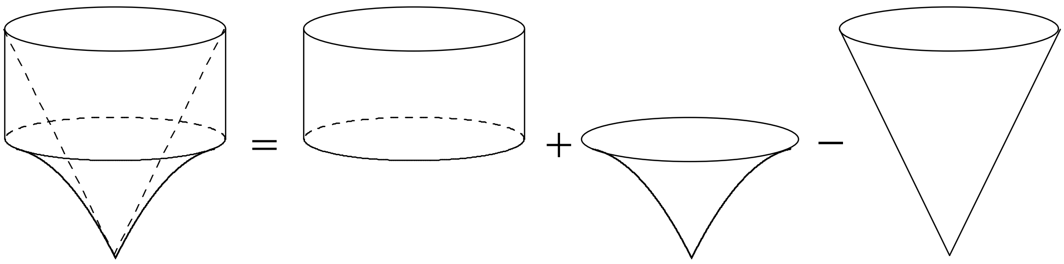
$x=1-\sqrt{1-y}$

D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_2 は，

底面の半径 1，高さ 1 の円柱の体積と曲線 $x=1-\sqrt{1-y}$ $(0\leqq y\leqq 1)$

を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を合わせたものから

底面の半径 1，高さ 2 の円錐の体積を引いたものである。



$$V_2=\pi\cdot 1^2\cdot 1+\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 2$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\int_0^1(2-y-2\sqrt{1-y})dy$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\left[2y-\frac{1}{2}y^2+\frac{4}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi\left\{\left(2-\frac{1}{2}+0\right)-\left(0-0+\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

…[答]