[1]

(1) $$b_{n+1}=\frac{-3}{a_{n+1}-1}=\frac{-3}{\frac{-3a_n+2}{a_n-2}-1}$$

$$=\frac{-3a_n+6}{-3a_n+2-a_n+2}=\frac{-3a_n+6}{-4a_n+4}$$

$$=\frac{3a_n-6}{4(a_n-1)}=\frac{3(a_n-1)-3}{4(a_n-1)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{4(a_n-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{a_n-1}+\frac{3}{4}$$

よって，$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{4}$ …[答]

(2) (1) より，$b_{n+1}-1=\frac{1}{4}(b_n-1)$ と変形できるから

数列 $\{b_n-1\}$ は

初項 $b_1-1=\frac{-3}{a_1-1}-1=\frac{-3}{4-1}-1=-1-1=-2$

公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列となっている

$$b_n-1=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=1-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ …[答]

(3) $b_n>\frac{2021}{2022}$ のとき，$1-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}>\frac{2021}{2022}$

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<1-\frac{2021}{2022}=\frac{1}{2022}=\frac{1}{2\cdot1011}$$

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{1011}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}<\frac{1}{1011}$$

$$\frac{1}{2^{2n-4}}<\frac{1}{1011}$$

$$2^{2n-4}>1011$$

2^{2n-4} は単調に増加して，$2^9=512$，$2^{10}=1024$ より

最小の自然数は $2n-4=10$ つまり $n=7$ のとき …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　円 C は中心 (1, 1), 半径 1 の円なので

$$C : (x-1)^2+(y-1)^2=1$$

よって, 円 C 上の点 $\mathrm{P}(1+\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ における接線の方程式は

$$(1+\cos\theta-1)(x-1)+(1+\sin\theta-1)(y-1)=1$$

$$(x-1)\cos\theta+(y-1)\sin\theta=1$$

この直線の x 切片, y 切片は, y, x にそれぞれ 0 を代入して

x 切片 : $(x-1)\cos\theta-\sin\theta=1$

$$x=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+1 \qquad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{より}\ \cos\theta\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0\right)$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\cos\theta}$$

y 切片 : $-\cos\theta+(y-1)\sin\theta=1$

$$y=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+1 \qquad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{より}\ \sin\theta\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0\right)$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}$$

よって

$$\mathrm{A}\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\cos\theta},\ 0\right),\ \ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)$$

これにより

$$L(\theta)=\sqrt{\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)^2+\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}} \qquad (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta\cos\theta} \quad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{より}\ \sin\theta>0,\ \cos\theta>0\right)$$

…[答]

(2)　$L(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta\cos\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ここで, $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$1<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

つまり　$1<t\leqq\sqrt{2}$

また，$t=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって，$L(\theta)$ を t を用いて表したものを $f(t)$ とすると

$$f(t)=\frac{t+1}{\dfrac{t^2-1}{2}}$$

$$=\frac{2(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$$=\frac{2}{t-1}\qquad (\because 1<t\leqq\sqrt{2})$$

ここで，$1<t\leqq\sqrt{2}$ より

$$0<t-1\leqq\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{t-1}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$\frac{2}{t-1}\geqq 2\sqrt{2}+2$$

よって，$t=\sqrt{2}$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小となり，最小値は

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$y=f(x)$ とすると　$y=ax^2+\dfrac{2}{a}$

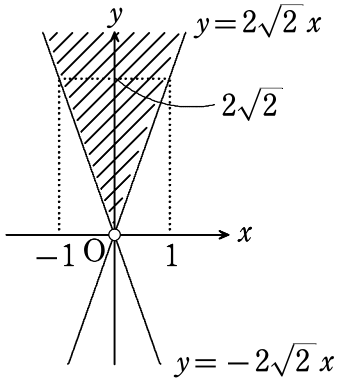
(i)　$x=0$ のとき $a>0$ から $y>0$

(ii)　$x\fallingdotseq 0$ のとき $a>0$ から $ax^2>0$, $\dfrac{2}{a}>0$ より

相加平均と相乗平均の関係から

$$y \geqq 2\sqrt{ax^2\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{2x^2}=2\sqrt{2}|x|$$

(i) , (ii) より求める領域は
右図の斜線部分で
原点以外の境界を含む。



…[答]

(2)　$y=g(x)$ とおくと　$y=a^2x^2+\dfrac{2}{a}$

(i)　$x=0$ のとき $a>0$ から $y>0$

(ii)　$x\fallingdotseq 0$ のとき

$p>0$, $q>0$, $r>0$ のとき, $p^3+q^3+r^3-3pqr$ について

$$\begin{aligned}p^3+q^3+r^3-3pqr&=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)\\&=\frac{1}{2}(p+q+r)\{(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\}\geqq 0\end{aligned}$$

つまり　$p^3+q^3+r^3 \geqq 3pqr$

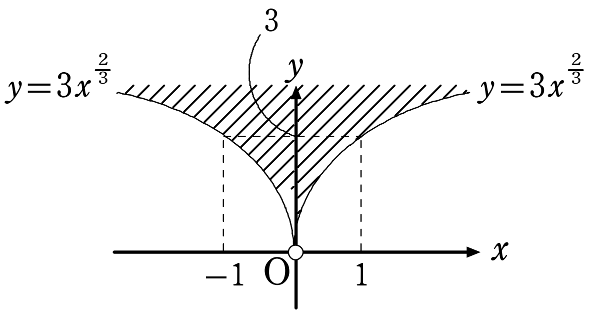
ここで $p=P^{\frac{1}{3}}$, $q=Q^{\frac{1}{3}}$, $r=R^{\frac{1}{3}}$ とおくと

$$P+Q+R \geqq 3\sqrt[3]{PQR}$$

よって

$$y=a^2x^2+\frac{2}{a}=a^2x^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\geqq 3\sqrt[3]{a^2x^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}}=3\sqrt[3]{x^2}=3x^{\frac{2}{3}}$$

(i), (ii) より, 求める領域は
右図の斜線部分で
原点以外の境界を含む。



…[答]

高松高等予備校

[4]

$f(x)=x\log x \quad (x>0)$ について

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int x\log x\,dx$

$$=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$ …[答]

$$\left(=\frac{1}{4}x^2(2\log x-1)+C\right)$$

(2) $a>1$ に対し, $I(a)=\displaystyle\int_1^a\{5f(x)-af'(x)\}\,dx$

(1) より $f(x)$ の不定積分のひとつとして

$F(x)=\dfrac{1}{4}x^2(2\log x-1)$ とすると

$$I(a)=5\Big[F(x)\Big]_1^a-a\Big[f(x)\Big]_1^a$$

$$=5\{F(a)-F(1)\}-a\{f(a)-f(1)\}$$

ここで $F(1)=-\dfrac{1}{4},\ f(1)=0$ より

$$I(a)=5F(a)-af(a)+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5}{4}a^2(2\log a-1)-a^2\log a+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{3}{2}a^2\log a-\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}$$ …[答]

(3) (2) より

$$I'(a)=\frac{3}{2}(2a\log a+a)-\frac{5}{2}a$$

$$=3a\log a-a$$

$$=a(3\log a-1)$$

$a>1$ で $I'(a)=0$ を解くと $a=e^{\frac{1}{3}}$

よって $a>1$ における $I(a)$ の増減表は

a	1		$e^{\frac{1}{3}}$	
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$I\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}}-\frac{5}{4}e^{\frac{2}{3}}+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$$

したがって

$a=e^{\frac{1}{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}\left(5-3e^{\frac{2}{3}}\right)$ …[答]

高松高等予備校