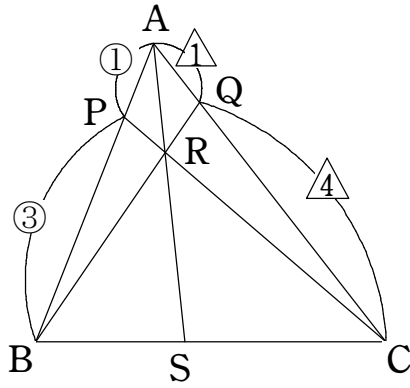


[1]



(1)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{5}\vec{b}$  …[答]

(2) 点 R は直線 BQ 上にあるので  

$$\overrightarrow{AR} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AQ} \quad (t \text{ は実数})$$

$$= (1-t)\vec{a} + \frac{t}{5}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

点 R は直線 CP 上にあるので  

$$\overrightarrow{AR} = (1-s)\overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{AC} \quad (s \text{ は実数})$$

$$= \frac{1-s}{4}\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であるから, ①, ②より

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1-s}{4} \\ \frac{t}{5} = s \end{cases}$$

これを解いて  $s = \frac{3}{19}$ ,  $t = \frac{15}{19}$

よって  $\overrightarrow{AR} = \frac{4}{19}\vec{a} + \frac{3}{19}\vec{b}$  …[答]

$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AR}$  ( $k$  は実数) とすると

$$\overrightarrow{AS} = \frac{4}{19}k\vec{a} + \frac{3}{19}k\vec{b}$$

点 S は直線 BC 上にあるので

$$\frac{4}{19}k + \frac{3}{19}k = 1 \quad \text{より} \quad k = \frac{19}{7}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AS} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} \quad \dots[\text{答}]$$

(3) (2)より  $AR : RS = 7 : 12$ ,  $BS : SC = 3 : 4$

$$\triangle RBS = \frac{BS}{BC} \cdot \frac{RS}{AS} \triangle ABC$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{12}{19} \triangle ABC$$

$$= \frac{36}{133} \triangle ABC$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{133}{36} \triangle RBS$$

$$\text{したがって} \quad \frac{133}{36} \text{ 倍} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校

[2]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad b_{n+1} &= \frac{-3}{a_{n+1}-1} = \frac{-3}{\frac{-3a_n+2}{a_n-2}-1} \\
 &= \frac{-3a_n+6}{-3a_n+2-a_n+2} = \frac{-3a_n+6}{-4a_n+4} \\
 &= \frac{3a_n-6}{4(a_n-1)} = \frac{3(a_n-1)-3}{4(a_n-1)} \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4(a_n-1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-3}{a_n-1} + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

よって、 $b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{4}$  …[答]

(2) (1) より、 $b_{n+1}-1 = \frac{1}{4}(b_n-1)$  と変形できるから

数列  $\{b_n-1\}$  は

$$\text{初項 } b_1-1 = \frac{-3}{a_1-1} - 1 = \frac{-3}{4-1} - 1 = -1-1 = -2$$

公比  $\frac{1}{4}$  の等比数列となっている

$$b_n-1 = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって、 $b_n = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  …[答]

(3)  $b_n > \frac{2021}{2022}$  のとき、 $1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} > \frac{2021}{2022}$

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 1 - \frac{2021}{2022} = \frac{1}{2022} = \frac{1}{2 \cdot 1011}$$

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{1011}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} < \frac{1}{1011}$$

$$\frac{1}{2^{2n-4}} < \frac{1}{1011}$$

$$2^{2n-4} > 1011$$

$2^{2n-4}$  は単調に増加して、 $2^9 = 512$ 、 $2^{10} = 1024$  より

最小の自然数は  $2n - 4 = 10$  つまり  $n = 7$  のとき

…[答]

高松高等予備校

[3]

(1)  $f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$  なので

頂点の座標は  $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + a\right)$  …[答]

(2)  $x$  軸と異なる 2 点で交わるには、放物線  $y = f(x)$  が下に凸だから  
 $-\frac{a^2}{4} + a < 0$  であればよい。

$$a^2 - 4a = a(a - 4) > 0 \quad \text{より}$$

$$a < 0 \quad \text{または} \quad 4 < a \quad \dots[\text{答}]$$

(3) (2) より

(i)  $0 < a < 4$  のとき

$y = f(x)$  は下に凸で、 $x$  軸と共有点を持たないので  
解はすべての実数

(ii)  $a = 0$  のとき

$f(x) = x^2$  より  $x = 0$  以外のすべての実数

(iii)  $a = 4$  のとき

$f(x) = (x - 2)^2$  より  $x = 2$  以外のすべての実数

(iv)  $a < 0$  または  $4 < a$  のとき

$$f(x) = 0 \text{ の解が } x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \text{ なので}$$

$$x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \quad \text{または} \quad \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} < x$$

…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)  $f(x) = x^3 - 6x^2$  より

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

曲線  $C$  上の点  $(p, f(p))$  における接線の方程式は

$$y - (p^3 - 6p^2) = (3p^2 - 12p)(x - p)$$

すなわち

$$y = (3p^2 - 12p)x - 2p^3 + 6p^2 \dots \textcircled{1}$$

…[答]

(2)  $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$f'(x) = 0$  とすると,  $x = 0, 4$

$f(x)$  の増減表は次のようになる。

$x$	…	0	…	4	…
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

よって,  $x = 0$  のとき極大値 0  
 $x = 4$  のとき極小値 -32 )

…[答]

(3) ① が  $(4, k)$  を通るとき

$$k = 4(3p^2 - 12p) - 2p^3 + 6p^2$$

すなわち

$$k = -2p^3 + 18p^2 - 48p$$

$g(p) = -2p^3 + 18p^2 - 48p$  とおく。

点  $(4, k)$  から曲線  $C$  上の異なる 3 点それぞれに接線が引けるのは,  
 $p$  についての方程式  $k = g(p)$  が異なる 3 つの実数解をもつとき, す  
 なわち曲線  $y = g(p)$  のグラフと直線  $y = k$  が異なる 3 個の共有点をも  
 つときである。

$$g'(p) = -6p^2 + 36p - 48$$

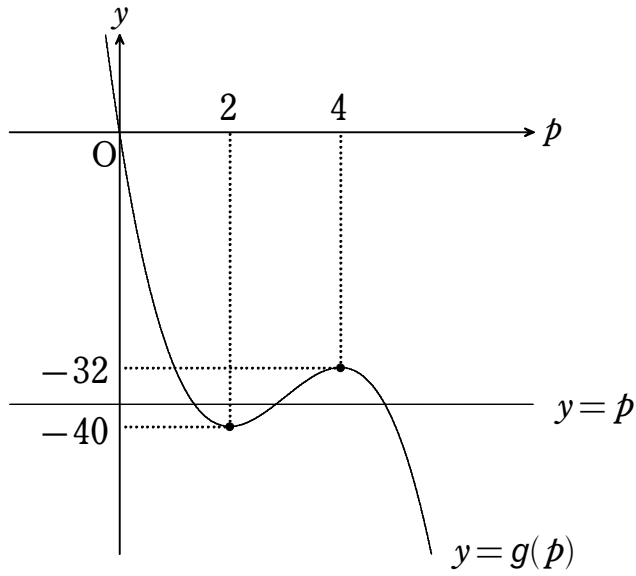
$$= -6(p^2 - 6p + 8)$$

$$= -6(p - 2)(p - 4)$$

$g'(p) = 0$  とすると,  $p = 2, 4$

$g(p)$  の増減表は次のようになる。

$p$	...	2	...	4	...
$g'(p)$	-	0	+	0	-
$g(p)$	↘	-40	↗	-32	↘



したがって、求める定数  $k$  の値の範囲は  
 $-40 < k < -32$

…[答]

高松高等予備校