数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

Sの勝つ確率は1，2，6，7戦は$\dfrac{3}{5}$，3，4，5戦は$\dfrac{1}{6}$

Tの勝つ確率は1，2，6，7戦は$\dfrac{2}{5}$，3，4，5戦は$\dfrac{5}{6}$

(1)　余事象は　Tが4連勝　なので

$$1-\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=1-\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{8}{9}$$

(2)　条件を満たすのは

（イ）　Tが4連勝　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{1}{3^2}$　……①

（ロ）　Tが4勝1敗

i)　3，4戦で1敗 の場合　(1，2，5戦はTが勝つ)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2\times{}_2C_1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{3^3}\qquad\cdots\cdots②$$

ii)　1，2戦で1敗の場合　(3，4，5戦はTが勝つ)

$${}_2C_1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{2\cdot3^2}\qquad\cdots\cdots③$$

これらは同時に起こらないので

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{5}{2\cdot3^2}=\frac{6+2+15}{2\cdot3^3}=\frac{23}{2\cdot3^3}=\frac{23}{54}$$

(3)　1，2戦でSが勝つ確率は　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

3戦目以降について

（イ）　2試合でSが優勝　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{2^2\cdot3^2}$

（ロ）　3試合でSが優勝

3，4戦は1勝1敗 で5戦目に勝つので

$${}_2C_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{3}=\frac{5}{2^2\times3^3}$$

（ハ）　4試合でSが優勝

3，4，5戦は1勝2敗 で6戦目に勝つので

$${}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{5}{2^3\cdot3}$$

(ニ)　5 試合で S が優勝

i)　3，4，5 戦で 1 勝 2 敗，6 戦目負け，7 戦目に勝つ

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2^2\cdot 3} $$

ii)　3，4，5 戦は 3 敗で 6，7 戦目で連勝

$$ \left(\frac{5}{6}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{5}{2^3\cdot 3} $$

(イ)〜(ニ)は同時に起こらないので

$$ \left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^3}+\frac{5}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{5}{2^3\cdot 3}\right) $$

$$ =\frac{3^2}{5^2}\cdot\frac{6+10+45+18+45}{2^3\cdot 3^3} $$

$$ =\frac{3^2}{5^2}\cdot\frac{124}{2^3\cdot 3^3} $$

$$ =\frac{31}{150} $$

……[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1) $P_1(1,1)$, $P_2(1,2)$, $P_3(2,1)$, $P_4(1,3)$, $P_5(2,2)$,
$P_6(3,1)$, $P_7(1,4)$, $P_8(2,3)$, $P_9(3,2)$, $P_{10}(4,1)$,
$P_{11}(1,5)$, $P_{12}(2,4)$

以上より,

座標 $(2, 4)$ である点は 12 番目 …[答]

P_{10} の座標は $(4, 1)$ …[答]

(2) $x+y=m$ $(m\geqq 2)$ のとき

$$(x,\ y)=(1,\ m-1),\ \ (2,\ m-2),\ \ \cdots\cdots,\ \ (m-1,\ 1)$$

となり, $x+y=m$ 上の格子点の個数は $(m-1)$ 個である。

(n, n) である点の番号 a_n は, $x+y=2n$ となり

$$a_n=\sum_{m=2}^{2n-1}(m-1)+n$$

$$=\sum_{m=1}^{2n-2}m+n$$

$$=\frac{1}{2}(2n-2)(1+2n-2)+n$$

$$=2n^2-2n+1$$ …[答]

(3) $$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　6 を法として

$n\equiv 0$ のとき，$n^3\equiv 0$

$n\equiv 1$ のとき，$n^3\equiv 1$

$n\equiv 2$ のとき，$n^3\equiv 2^3\equiv 8\equiv 2$

$n\equiv 3$ のとき，$n^3\equiv 3^3\equiv 27\equiv 3$

$n\equiv 4$ のとき，$n^3\equiv 4^3\equiv 64\equiv 4$

$n\equiv 5$ のとき，$n^3\equiv 5^3\equiv 125\equiv 5$

よって，n を 6 で割った余りと n^3 を 6 で割った余りは等しい。

…[証明終]

(2)　$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ のとき

$$a^3+b^3=(c+1)^3-c^3$$
$$=(c^3+3c^2+3c+1)-c^3$$
$$=3c(c+1)+1 \qquad \cdots\cdots①$$

(1) より，$a+b$ を 6 で割った余りは a^3+b^3 を 6 で割った余りに等しい。ところで c は整数より $c(c+1)$ は連続する２つの整数の積であるから 2 の倍数となるので，$3c(c+1)$ は 6 の倍数

ゆえに，a^3+b^3 つまり $a+b$ を 6 で割った余りは 1 である。

…[証明終]

(3)　$1\leqq a\leqq 10$，$1\leqq b\leqq 10$ より $2\leqq a+b\leqq 20$

(2)より $a+b$ を 6 で割った余りは 1 であるから

$$a+b=7,13,19$$

また

$$a^3+b^3=3c(c+1)+1 \qquad \cdots\cdots①$$

において，$c\leqq 10$ より

$$3c(c+1)+1\leqq 3\cdot 10(10+1)+1$$
$$a^3+b^3\leqq 331$$

さらに，$7^3=343$ より

$$b\leqq 6 \qquad \cdots\cdots②$$

(i)　$a+b=7$ のとき

$$(a,b)=(1,6),(2,5),(3,4)$$

（ア）　$(a,b)=(1,6)$ のとき

①より

$$217=3c(c+1)+1$$
$$c(c+1)=72$$

$6 \leqq c \leqq 10$ より

$$c=8$$

（イ）　$(a, b)=(2, 5)$ のとき

①より

$$133=3c(c+1)+1$$

$$c(c+1)=44$$

これを満たす $5 \leqq c \leqq 10$ となる整数 c は存在しない。

（ウ）　$(a, b)=(3, 4)$ のとき

①より

$$91=3c(c+1)+1$$

$$c(c+1)=30$$

$4 \leqq c \leqq 10$ より

$$c=5$$

(ii)　$a+b=13$ のとき

$(a, b)=(3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$

これらは②を満たさない。

(iii)　$a+b=19$ のとき

$(a, b)=(9, 10)$

これは②を満たさない。

以上より

$(a, b, c)=(1, 6, 8), (3, 4, 5)$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ とおく

２点 $(1, 1)$，$(-1, -1)$ を通るので

$$\begin{cases} 1=a+b+c \\ -1=a-b+c \end{cases}$$

よって

$$b=1,\quad c=-a$$

したがって，

$$f(x)=ax^2+x-a$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2+x-a \\ &=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}-a \end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a}-a\right)$$

頂点の x 座標が $x>0$ より

$$-\frac{1}{2a}>0$$

$$a<0$$

頂点の y 座標は

$$y=\left(-\frac{1}{4a}\right)+(-a)$$

で，$a<0$ より

$$-\frac{1}{4a}>0,\quad -a>0$$

より，相加相乗平均の関係より

$$\left(-\frac{1}{4a}\right)+(-a)\geqq 2\sqrt{\left(-\frac{1}{4a}\right)(-a)}$$

$$y\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\geqq 1$$

等号が成り立つのは

$$-\frac{1}{4a}=-a$$

$$a^2=\frac{1}{4}$$

$a<0$ より

$$a=-\frac{1}{2}$$

以上より，頂点の y 座標は

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 1 …[答]

(2) 頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ より

$$0\leqq -\frac{1}{4a}-a\leqq 2$$

$0\leqq -\dfrac{1}{4a}-a$ より

$$a<0$$

$a<0$ より

$$-\frac{1}{4a}-a\leqq 2$$

$$-1-4a^2\geqq 8a$$

$$4a^2+8a+1\leqq 0$$

$$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\ (a<0\ \text{を満たす。})$$

また， $y=f(x)$ と $y=x$ の交点の x 座標は

$$\begin{cases} y=ax^2+x-a \\ y=x \end{cases}$$

より

$$x=-1,1$$

したがって，求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(ax^2+x-a)-x\}dx$$

$$=a\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=a\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-1)\}^3$$

$$=-\frac{4}{3}a$$

以上より，面積は

$a=\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$

$a=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$ …[答]