２０２１年度入学試験問題

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄２箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

1

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3) 不等式 $\sin 3x \geqq a \sin x$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。

2

z は複素数で，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が $\angle\mathrm{C}$ を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

3

以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 a，b，c が条件

$$a^3 + b^3 + c^3 = (c+1)^3 \qquad (*)$$

を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq 10$ を満たす整数の組 (a, b, c) で，(2) の条件 $(*)$ を満たすものをすべて求めよ。

4

正の整数 n に対して，関数 $f(x) = x^{2n}$ を考える。$t > 0$ に対して，曲線 $y = f(x)$ 上の 3 点

$$\mathrm{A}\,(-t,\ f(-t)),\quad \mathrm{O}\,(0,0),\quad \mathrm{B}\,(t,\ f(t))$$

を通る円の中心を $(p(t),\ q(t))$，半径を $r(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0} p(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0} q(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0} r(t)$ がすべて収束するとき $n=1$ であることを示せ。また，このとき $a = \displaystyle\lim_{t\to+0} p(t)$，$b = \displaystyle\lim_{t\to+0} q(t)$，$c = \displaystyle\lim_{t\to+0} r(t)$ の値を求めよ。

(2) a，b，c を (1) で求めたものとする。このとき，中心 (a, b)，半径 c の円と放物線 $y = x^2$ および直線 $x = b$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。