数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi \cdots (*)$

$\sin x = s\ (-1 \leqq s \leqq 1)$ とする

$\sin 3x = 3s - 4s^3$ であるから

(1)　$\sin 3x = -\sin x$ は $3s - 4s^3 = -s \Leftrightarrow s^3 - s = 0 \Leftrightarrow s(s^2-1) = 0$

よって　$s = \sin x = 0,\ \pm 1$

$(*)$ より　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ …[答]

(2)　$\sin 3x = \sin x$ は $3s - 4s^3 = s \Leftrightarrow 2s^3 - s = 0 \Leftrightarrow s(2s^2-1) = 0$

よって　$s = \sin x = 0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(*)$ より　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ 2\pi$ …[答]

(3)　$3s - 4s^3 \geqq as$

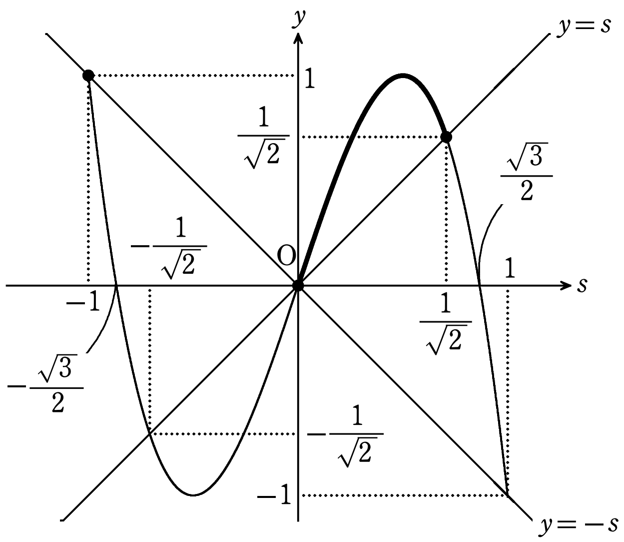
$s-y$ 平面で $\begin{cases} y = s(3-4s^2) & \cdots\cdots① \\ y = as & \cdots\cdots② \end{cases}$ のグラフの上下関係で考える。

$a = -1$ のとき，①，②の共有点の s 座標は(1)より

$s = 0,\ \pm 1$

$a = 1$ のとき，①，②の共有点の s 座標は(2)より

$s = 0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



よって，題意を満たすためには，$0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$s = -1$

すなわち，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi,\ x = \dfrac{3}{2}\pi,\ x = 2\pi$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

z は複素数で，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$

(1) 3点A(1)，B(z)，C(z^2) が一直線上のとき

$$\frac{z^2-1}{z-1}=\overline{\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)}$$

$$z+1=\overline{z}+1$$

$$\therefore\ z=\overline{z}$$

よって，z は実数

逆に z が実数のとき，A，B，C は一直線上にある。

よって，求める必要十分条件は z は実数 ($z \neq 0$，$z \neq \pm 1$)

…[答]

(2) ∠C=90°より

$$\frac{z-z^2}{1-z^2}+\overline{\left(\frac{z-z^2}{1-z^2}\right)}=0$$

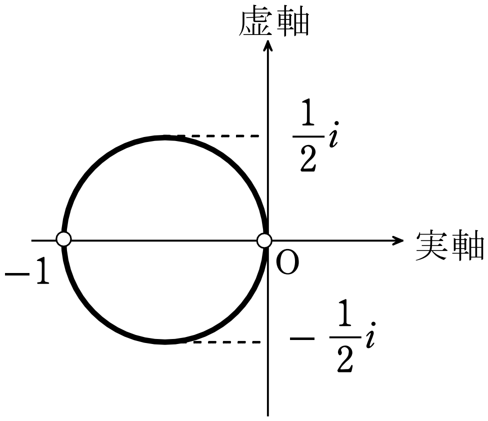
$$\frac{z}{1+z}+\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}}=0$$

$$z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$



…[答]

(3)　∠A＝90°のとき

$$\frac{z^2-1}{z-1}+\overline{\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)}=0$$

$$z+1+\overline{z}+1=0$$

$$\therefore\quad z+\overline{z}=-2$$

$z=x+yi$ (x, y は実数)とおくと

$\overline{z}=x-yi$ より　$x=-1$

∠B＝90°のとき

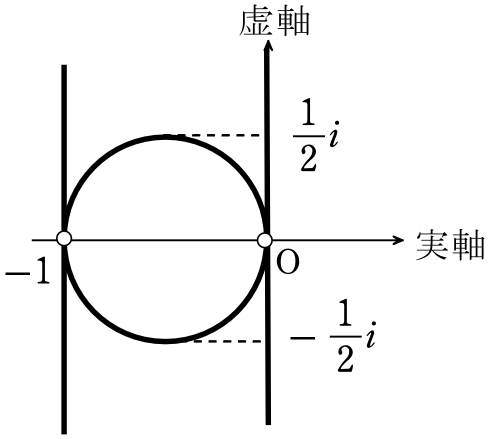
$$\frac{z^2-z}{1-z}+\overline{\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right)}=0$$

$$-z+(-\overline{z})=0$$

$$\therefore\quad z+\overline{z}=0$$

$z=x+yi$ (x, y は実数)とおくと

$x=0$



(1)より，実軸上は除く。　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　6 を法として

$n\equiv 0$ のとき，$n^3\equiv 0$

$n\equiv 1$ のとき，$n^3\equiv 1$

$n\equiv 2$ のとき，$n^3\equiv 2^3\equiv 8\equiv 2$

$n\equiv 3$ のとき，$n^3\equiv 3^3\equiv 27\equiv 3$

$n\equiv 4$ のとき，$n^3\equiv 4^3\equiv 64\equiv 4$

$n\equiv 5$ のとき，$n^3\equiv 5^3\equiv 125\equiv 5$

よって，n を 6 で割った余りと n^3 を 6 で割った余りは等しい。

…[証明終]

(2)　$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ のとき

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(c+1)^3-c^3\\&=(c^3+3c^2+3c+1)-c^3\\&=3c(c+1)+1\qquad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

(1) より，$a+b$ を 6 で割った余りは a^3+b^3 を 6 で割った余りに等しい。ところで c は整数より $c(c+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから 2 の倍数となるので，$3c(c+1)$ は 6 の倍数

ゆえに，a^3+b^3 つまり $a+b$ を 6 で割った余りは 1 である。

…[証明終]

(3)　$1\leqq a\leqq 10$，$1\leqq b\leqq 10$ より $2\leqq a+b\leqq 20$

(2)より $a+b$ を 6 で割った余りは 1 であるから

$$a+b=7, 13, 19$$

また

$$a^3+b^3=3c(c+1)+1\qquad \cdots\cdots①$$

において，$c\leqq 10$ より

$$3c(c+1)+1\leqq 3\cdot 10(10+1)+1$$

$$a^3+b^3\leqq 331$$

さらに，$7^3=343$ より

$$b\leqq 6\qquad \cdots\cdots②$$

(i)　$a+b=7$ のとき

$$(a, b)=(1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

（ア）　$(a, b)=(1, 6)$ のとき

①より

$$217=3c(c+1)+1$$

$$c(c+1)=72$$

$6 \leqq c \leqq 10$ より

$c=8$

（イ）　$(a, b)=(2, 5)$ のとき

①より

$133=3c(c+1)+1$

$c(c+1)=44$

これを満たす $5 \leqq c \leqq 10$ となる整数 c は存在しない。

（ウ）　$(a, b)=(3, 4)$ のとき

①より

$91=3c(c+1)+1$

$c(c+1)=30$

$4 \leqq c \leqq 10$ より

$c=5$

(ii)　$a+b=13$ のとき

$(a, b)=(3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$

これらは②を満たさない。

(iii)　$a+b=19$ のとき

$(a, b)=(9, 10)$

これは②を満たさない。

以上より

$(a, b, c)=(1, 6, 8), (3, 4, 5)$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　3 点 A $(-t,\ (-t)^{2n})$，　O $(0,\ 0)$，　B $(t,\ t^{2n})$ を通る円の中心
　C $(p(t),\ q(t))$ は線分 OA，　OB の垂直二等分線

$$y=\frac{t}{t^{2n}}x+\frac{t^2}{2t^{2n}}+\frac{t^{2n}}{2}$$

$$y=-\frac{t}{t^{2n}}x+\frac{t^2}{2t^{2n}}+\frac{t^{2n}}{2}$$

の交点であるから

$$p(t)=0,\ q(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^{2n-2}}+t^{2n}\right)$$

$$r(t)=\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^{2n-2}}+t^{2n}\right)$$

$$a=\lim_{t\to+0}p(t)=0$$

$$b=\lim_{t\to+0}q(t)$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^{2n-2}}+t^{2n}\right)$$

$n\geqq 2$ のとき，　$\displaystyle\lim_{t\to+0}q(t)=+\infty$

よって，　$n=1$

このとき，　$b=\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{1}{2}(1+t^2)=\frac{1}{2}$

また，　$c=\displaystyle\lim_{t\to+0}r(t)=\frac{1}{2}$

以上より，　$a=0,\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{2}$　　　　…[答]

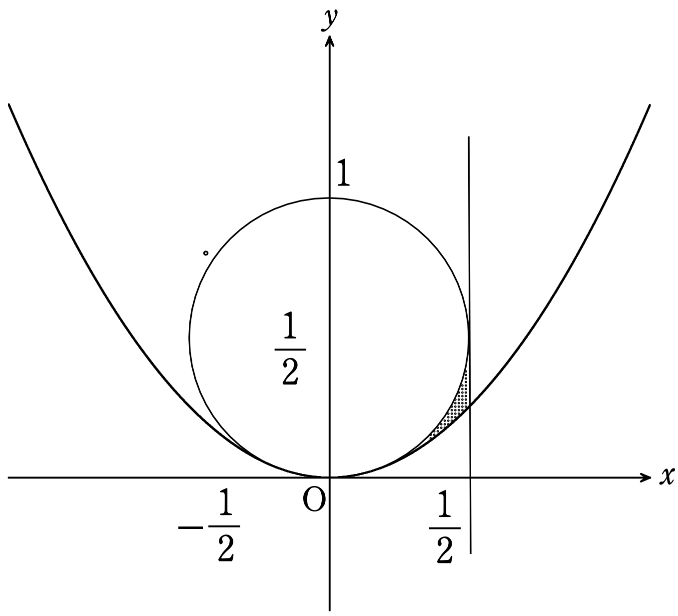
(2)　中心 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ と放物線 $y=x^2$ は
原点 $(0,\ 0)$ で図のように接するので
求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\right)^2-x^4\right\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x^2-x^4-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi^2}{16}$$

$$= \frac{97}{480}\pi - \frac{\pi^2}{16} \quad \cdots[答]$$



高松高等予備校