

[1]

$$(1) f(x) = \frac{1}{2}|x^2 + 4x - 5| + x$$

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

(i) $x \leq -5$, $1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 5) + x \\ &= \frac{1}{2}(x+3)^2 - 7 \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ のとき

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{より} \quad x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9+5} = -3 \pm \sqrt{14}$$

$$f(-5) = -5, \quad f(1) = 1$$

(ii) $x \leq -5$, $1 \leq x$ のとき

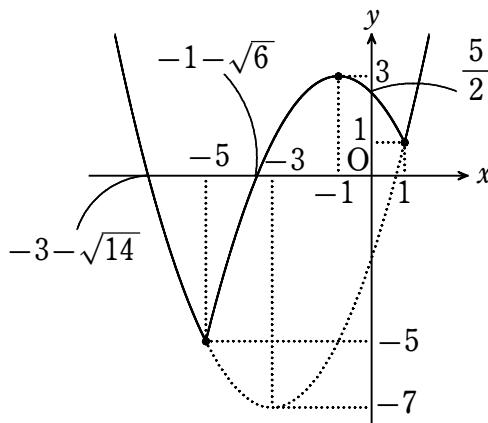
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x^2 + 4x - 5) + x \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = 0 \quad \text{より} \quad x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{6}$$

$y = f(x)$ のグラフは次のとおり



…[答]

(2) $f(x) + k = 0$

$$f(x) = -k$$

実数解の個数は曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = -k$ との異なる共有点の個数と一致する。

$-k < -5$ つまり $k > 5$ のとき 0 個

$-k = -5$ つまり $k = 5$ のとき 1 個

$3 < -k, -5 < k < 1$ つまり $k < -3, -1 < k < 5$ のとき 2 個

$-k = 1, 3$ つまり $k = -3, -1$ のとき 3 個

$1 < -k < 3$ つまり $-3 < k < -1$ のとき 4 個

以上より

$k > 5$ のとき 0 個

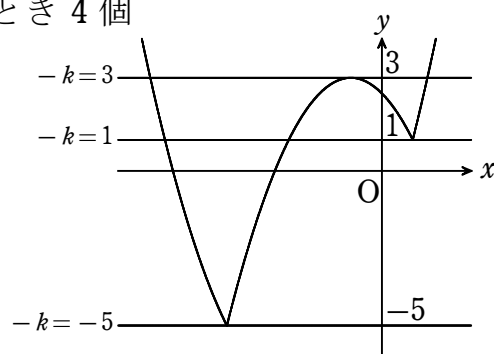
$k = 5$ のとき 1 個

$k < -3, -1 < k < 5$ のとき 2 個

$k = -3, -1$ のとき 3 個

$-3 < k < -1$ のとき 4 個

...[答]



(3) P(-5, 5), Q(1, 1)

ℓは2点 P, Q を通る直線であるから $y = x$

ℓ と垂直な直線 m の傾きは -1

$x \leq -5, 1 \leq x$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$f'(x) = -1$ のとき $x + 3 = -1$

$x = -4$ となり $x \leq -5, 1 \leq x$ に反する。

$-5 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$$

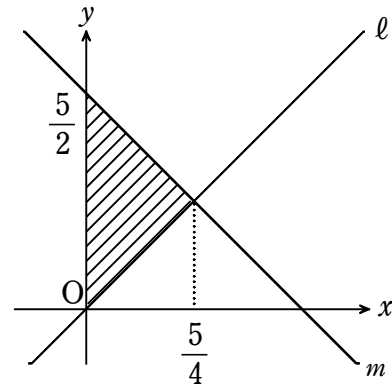
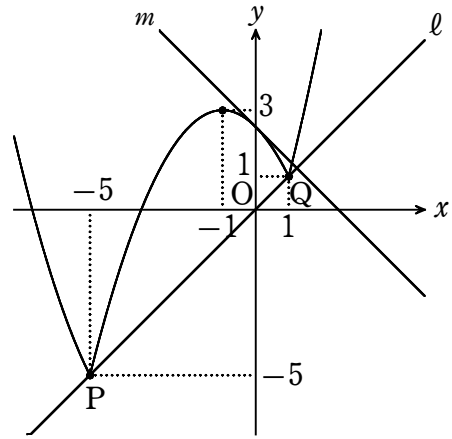
$$f'(x) = -x - 1$$

$f'(x) = -1$ のとき $-x - 1 = -1$

$x = 0$ となり $-5 \leq x \leq 1$ に適する。

したがって直線 m は $(0, \frac{5}{2})$ で接する

ときで、その方程式は $y = -x + \frac{5}{2}$



ℓ と m の共有点の x 座標は

$$x = -x + \frac{5}{2}$$

$$2x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{4}$$

よって、直線 ℓ , m と y 軸とで囲まれた三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{16} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校

[2]

最初と同じ状態を **P**，そうでない状態を **Q** とすると

- (1) **P** から **P** となるのは，袋 **A**，袋 **B** から同じ色の球を取り出す場合だから

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \dots[\text{答}]$$

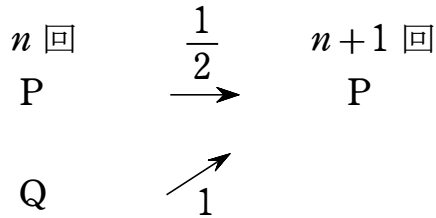
また，状態 **Q** からは確率 1 で状態 **P** になるので，2 回の試行後に状態 **P** になるのは

P → **P** → **P** または **P** → **Q** → **P** だから

$$a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3}{4} \quad \dots[\text{答}]$$

$$a_3 = a_2 \times \frac{1}{2} + (1 - a_2) \times 1 = \frac{5}{8} \quad \dots[\text{答}]$$

(2)



$n+1$ 回の試行後に状態 **P** となるのは

n 回の試行後に状態 **P** から確率 $\frac{1}{2}$ で状態 **P** になる場合か

n 回の試行後に状態 **Q** から確率 1 で状態 **P** になる場合かのいずれかなので

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n \quad \dots[\text{答}]$$

- (3) $b_n = 1 - a_n$ だから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + 1 - a_n \\ &= -\frac{1}{2}a_n + 1 \end{aligned}$$

これより， $a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$ だから

数列 $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ ，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となる。

$$\therefore a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

$$(1) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OP} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = n\vec{b}$ (m, n は正の実数) から

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{OP}, \quad \vec{b} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OQ}$$

①へ代入して

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4m}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{4n}\overrightarrow{OQ}$$

点 D は直線 PQ 上の点であるから

$$\frac{1}{4m} + \frac{1}{4n} = 1$$

したがって

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4$$

…[答]

$$(2) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 3$$

$$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = 3$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 3$$

$$5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{PQ}$ より

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\vec{a} \cdot (n\vec{b} - m\vec{a}) = 0$$

$$n\vec{a} \cdot \vec{b} - m|\vec{a}|^2 = 0$$

$$\frac{3}{2}n - m = 0$$

$$m = \frac{3}{2}n$$

(1) より

$$\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{n} = 4$$

$$\frac{5}{3n} = 4$$

$$n = \frac{5}{12}$$

したがって、

$$\begin{aligned} m &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

以上より

$$m = \frac{5}{8}, \quad n = \frac{5}{12}$$

…[答]

高松高等予備校

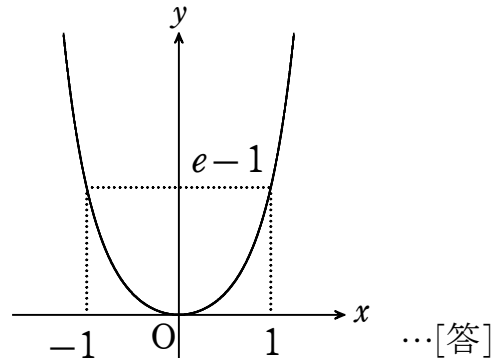
[4]

$$f(x) = e^{x^2} - 1, \quad g(x) = x^2$$

(1) $f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2}$

$f''(x)$ は常に正で、増減表は

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	0	↗



(2) $x \geq 0$ において

$$f(x) - g(x) = e^{x^2} - 1 - x^2 = F(x) \text{ とする。}$$

$$F'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1) = 2xf(x) \geq 0 \quad ((1) \text{より})$$

よって、 $x \geq 0$ において $F(x)$ は単調増加

$$F(0) = 0 \text{ より } x \geq 0 \text{ のとき } F(x) \geq 0$$

したがって $f(x) \geq g(x)$

等号成立は $x = 0$ のとき

...[答]

(3) $y = f(x)$ より $e^{x^2} = y + 1$

$$x^2 = \log(y + 1)$$

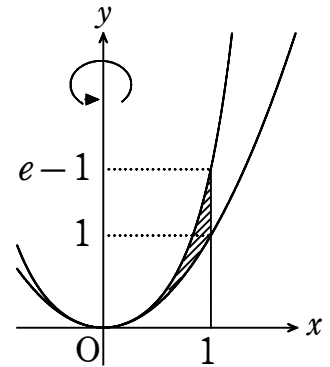
$y = g(x)$ より $x^2 = y$

したがって、求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^{e-1} 1^2 dy - \pi \int_0^{e-1} \log(y + 1) dy$$

$$= \frac{1}{2}\pi + (e - 2)\pi - \pi$$

$$= \left(e - \frac{5}{2}\right)\pi$$



...[答]

高松高等予備校

[5]

(1) $z = x + yi$ とする

$$\begin{aligned}\omega z &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)(x + yi) \\ &= \frac{1}{2}\{-(x + \sqrt{3}y) + (\sqrt{3}x - y)i\} \quad \text{なので}\end{aligned}$$

$$\omega z - z = \frac{1}{2}\{-(3x + \sqrt{3}y) + (\sqrt{3}x - 3y)i\} \quad \text{である。}$$

また

$$z - \omega = \frac{1}{2}\{(2x + 1) + (2y - \sqrt{3})i\}$$

(i) $\omega \neq z$ のとき

3点 ω , z , ωz が一直線上にあるための必要十分条件は $\omega z - z = k(z - \omega)$ を満たす実数 k が存在すればよいので

$$\begin{cases} -\sqrt{3}(\sqrt{3}x + y) = k(2x + 1) & \cdots\cdots\text{①} \\ \sqrt{3}(x - \sqrt{3}y) = k(2y - \sqrt{3}) & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

①, ②より, k を消去して

$$-(\sqrt{3}x + y)(2y - \sqrt{3}) = (x - \sqrt{3}y)(2x + 1)$$

これを整理して

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1 \quad (z = \omega \text{ は除く})\end{aligned}$$

(ii) $z = \omega$ のとき

明らかに一直線上にある。

以上より, 複素数 z が表す図形は

点 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ を中心とする半径 1 の円である。 …[答]

(2) $\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi$ より 3点 z , ωz , $\omega^2 z$ を結ぶ正三角形の

外接円の半径は $|z|$ であり, 3点 1 , ω , ω^2 を結ぶ正三角形の外接円の半径は 1 なので, $|z|^2 = 2$ であればよい。

したがって, $x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y = 0$ と $x^2 + y^2 = 2$ を連立させて

$$x + \sqrt{3}y = 2 \quad \text{より} \quad x = 2 - \sqrt{3}y$$

$$(2 - \sqrt{3}y)^2 + y^2 = 2$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \quad \text{のとき} \quad x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad \text{のとき} \quad x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

よって

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i \quad \text{または} \quad z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校