[1]

(1)　$f(x)=\frac{1}{2}|x^2+4x-5|+x$

$x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$

(i)　$x\leqq -5$，$1\leqq x$ のとき

$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+4x-5)+x$

$=\frac{1}{2}(x+3)^2-7$

$f(x)=0$ のとき

$\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}=0$　より　$x^2+6x-5=0$

$x=-3\pm\sqrt{9+5}=-3\pm\sqrt{14}$

$f(-5)=-5$，$f(1)=1$

(ii)　$x\leqq -5$，$1\leqq x$ のとき

$f(x)=-\frac{1}{2}(x^2+4x-5)+x$

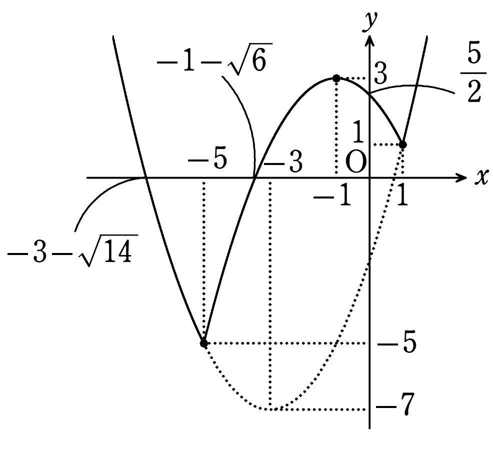
$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$

$f(x)=0$ のとき

$-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=0$　より　$x^2+2x-5=0$

$x=-1\pm\sqrt{6}$

$y=f(x)$ のグラフは次のとおり



…[答]

(2)　$f(x)+k=0$

$$f(x)=-k$$

実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-k$ との異なる共有点の個数と一致する。

$-k<-5$　つまり　$k>5$ のとき 0 個

$-k=-5$　つまり　$k=5$ のとき 1 個

$3<-k$，$-5<k<1$　つまり　$k<-3$，$-1<k<5$ のとき 2 個

$-k=1$，3　つまり　$k=-3$，-1 のとき 3 個

$1<-k<3$　つまり　$-3<k<-1$ のとき 4 個

以上より

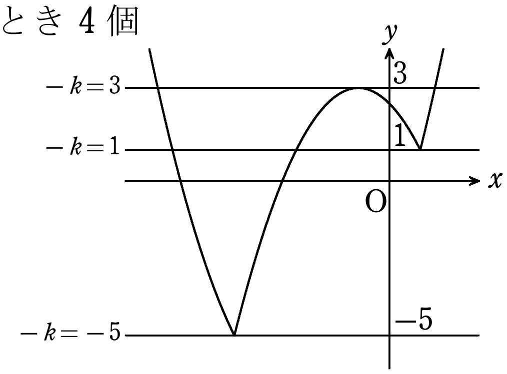
$k>5$ のとき 0 個

$k=5$ のとき 1 個

$k<-3$，$-1<k<5$ のとき 2 個

$k=-3$，-1 のとき 3 個

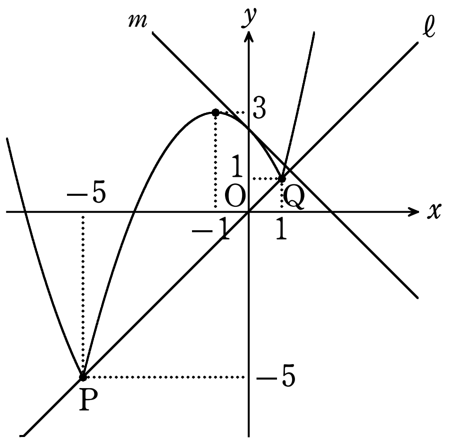
$-3<k<-1$ のとき 4 個　　…[答]



(3)　P$(-5,\ 5)$，Q$(1,\ 1)$

ℓ は 2 点 P，Q を通る直線であるから　$y=x$

ℓ と垂直な直線 m の傾きは -1



$x \leqq -5$，$1 \leqq x$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=x+3$$

$f'(x)=-1$ のとき　$x+3=-1$

$x=-4$ となり $x \leqq -5$，$1 \leqq x$ に反する。

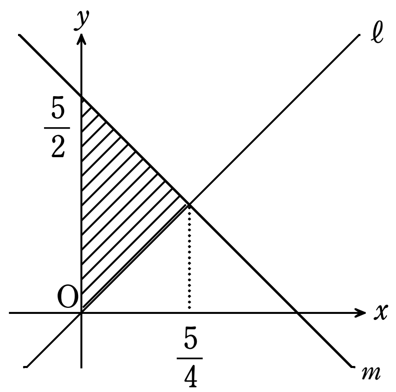
$-5 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=-x-1$$

$f'(x)=-1$ のとき　$-x-1=-1$

$x=0$ となり $-5 \leqq x \leqq 1$ に適する。



したがって直線 m は $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$ で接する

ときで，その方程式は $y=-x+\frac{5}{2}$

ℓ と m の共有点の x 座標は

$$x=-x+\frac{5}{2}$$

$$2x=\frac{5}{2}$$

$$x=\frac{5}{4}$$

よって，直線 ℓ，m と y 軸とで囲まれた三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{16} \qquad \cdots[答]$$

高松高等予備校

[2]

最初と同じ状態をP，そうでない状態をQとすると

(1)　PからPとなるのは，袋A，袋Bから同じ色の球を取り出す場合だから

$$a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \qquad \cdots[答]$$

また，状態Qからは確率1で状態Pになるので，2回の試行後に状態Pになるのは

P→P→P　または　P→Q→Pだから

$$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{4} \qquad \cdots[答]$$

$$a_3=a_2\times\frac{1}{2}+(1-a_2)\times 1=\frac{5}{8} \qquad \cdots[答]$$

(2)

$$\begin{array}{ccc} n\ \text{回} & \frac{1}{2} & n+1\ \text{回} \\ \mathrm{P} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ & & \\ \mathrm{Q} & \overset{}{\underset{1}{\nearrow}} & \end{array}$$

$n+1$回の試行後に状態Pとなるのは

n回の試行後に状態Pから確率$\frac{1}{2}$で状態Pになる場合か

n回の試行後に状態Qから確率1で状態Pになる場合か

のいずれかなので

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n \qquad \cdots[答]$$

(3)　$b_n=1-a_n$だから

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1-a_n$$

$$=-\frac{1}{2}a_n+1$$

これより，$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$だから

数列$\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$は初項$a_1-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$，公比$-\frac{1}{2}$の等比数列となる。

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore \quad a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ …[答]

高松高等予備校

[3]

球面の中心 C は C(0，0，1)
点P(0，1，2)を通る直線が球面と接する点をQ(X，Y，Z)とし，直線PQ が xy 平面と交わる点をR(x，y，0)とすると

$$X^2+Y^2+(Z-1)^2=1 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}$ (t は実数)とおけるので

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ 0)&=(0,\ 1,\ 2)+t(X,\ Y-1,\ Z-2)\\&=(tX,\ 1+t(Y-1),\ 2+t(Z-2))\end{aligned}$$

$2+t(Z-2)=0 \quad Z\neq 2$ より $\quad t=\dfrac{2}{2-Z}$

$$(x,\ y,\ 0)=\left(\frac{2X}{2-Z},\ 1+\frac{2(Y-1)}{2-Z},\ 0\right)$$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CQ}$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=(X,\ Y-1,\ Z-2)$，$\overrightarrow{CQ}=(X,\ Y,\ Z-1)$ であるから

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CQ}=X^2+Y(Y-1)+(Z-1)(Z-2)=0 \quad \cdots②$$

①，②より $\quad Y+Z-2=0$

$$Y=2-Z$$

このとき

$$\begin{cases}x=\dfrac{2X}{2-Z}=\dfrac{2X}{Y}\\[2ex] y=1+\dfrac{2(Y-1)}{2-Z}=1+\dfrac{2(Y-1)}{Y}=3-\dfrac{2}{Y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}Y=-\dfrac{2}{y-3}\\[2ex] X=\dfrac{xY}{2}=-\dfrac{x}{y-3}\\[2ex] Z=2-Y=2+\dfrac{2}{y-3}\end{cases}$$

①より $\quad \left(-\dfrac{x}{y-3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{y-3}\right)^2+\left(2+\dfrac{2}{y-3}-1\right)^2=1$

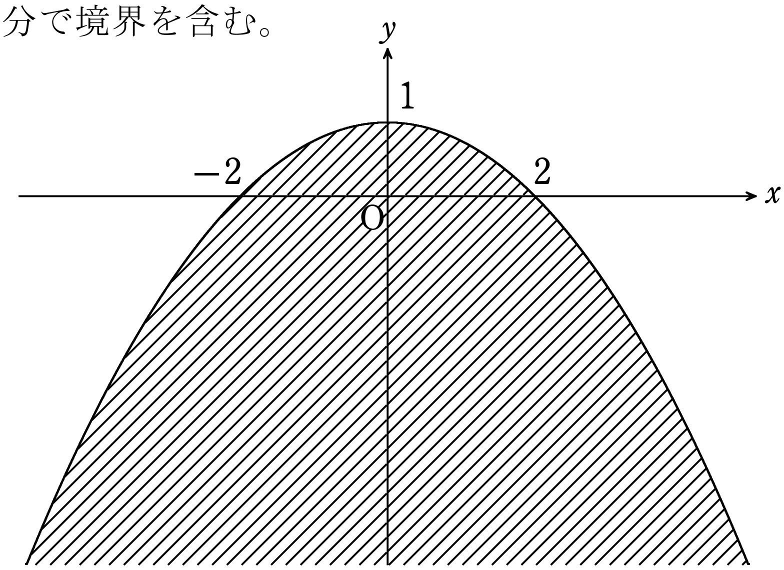
$$\left(\frac{x}{y-3}\right)^2+\left(\frac{2}{y-3}\right)^2+\left(\frac{y-1}{y-3}\right)^2=1$$

$$x^2+4+(y-1)^2=(y-3)^2$$

$$y=-\frac{1}{4}x^2+1$$

よって，求める R の動く領域は　　$y \leqq -\dfrac{1}{4}x^2+1$　　…[答]

図の斜線部分で境界を含む。



…[答]

高松高等予備校

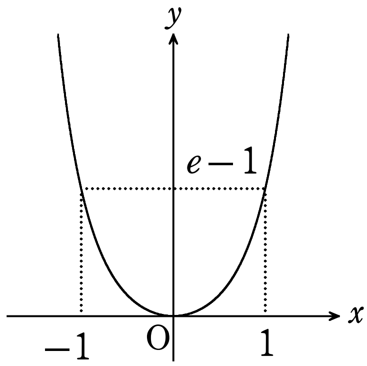
[4]

$f(x)=e^{x^2}-1$,　$g(x)=x^2$

(1)　$f'(x)=2xe^{x^2}$,　$f''(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}$

$f''(x)$は常に正で，増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↗



…[答]

(2)　$x\geqq 0$ において

$f(x)-g(x)=e^{x^2}-1-x^2=F(x)$とする。

$F'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)=2xf(x)\geqq 0$　((1)より)

よって，$x\geqq 0$ において $F(x)$ は単調増加

$F(0)=0$ より　$x\geqq 0$ のとき　$F(x)\geqq 0$

したがって　$f(x)\geqq g(x)$

等号成立は $x=0$ のとき　…[答]

(3)　$y=f(x)$ より　$e^{x^2}=y+1$

$x^2=\log(y+1)$

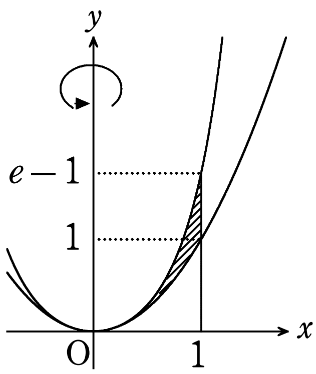
$y=g(x)$ より $x^2=y$

したがって，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^{e-1}1^2\,dy-\pi\int_0^{e-1}\log(y+1)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi+(e-2)\pi-\pi$$

$$=\left(e-\frac{5}{2}\right)\pi$$



…[答]

高松高等予備校

[5]

(1) $z=x+yi$ とする

$$\omega z=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)(x+yi)$$

$$=\frac{1}{2}\{-(x+\sqrt{3}\,y)+(\sqrt{3}\,x-y)i\}\quad なので$$

$$\omega z-z=\frac{1}{2}\{-(3x+\sqrt{3}\,y)+(\sqrt{3}\,x-3y)i\}\quad である。$$

また

$$z-\omega=\frac{1}{2}\{(2x+1)+(2y-\sqrt{3})i\}$$

(i) $\omega\fallingdotseq z$ のとき

3 点 ω，z，ωz が一直線上にあるための必要十分条件は

$\omega z-z=k(z-\omega)$ を満たす実数 k が存在すればよいので

$$\begin{cases}-\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x+y)=k(2x+1) & \cdots\cdots①\\ \sqrt{3}(x-\sqrt{3}\,y)=k(2y-\sqrt{3}) & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①，②より，k を消去して

$$-(\sqrt{3}\,x+y)(2y-\sqrt{3})=(x-\sqrt{3}\,y)(2x+1)$$

これを整理して

$$x^2+y^2-x-\sqrt{3}\,y=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1\quad (z=\omega\ は除く)$$

(ii) $z=\omega$ のとき

明らかに一直線上にある。

以上より，複素数 z が表す図形は

点 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ を中心とする半径 1 の円である。 …[答]

(2) $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ より 3 点 z，ωz，$\omega^2 z$ を結ぶ正三角形の外接円の半径は $|z|$ であり，3 点 1，ω，ω^2 を結ぶ正三角形の外接円の半径は 1 なので，$|z|^2=2$ であればよい。

したがって，$x^2+y^2-x-\sqrt{3}\,y=0$ と $x^2+y^2=2$ を連立させて

$x+\sqrt{3}\,y=2$ より $x=2-\sqrt{3}\,y$

$$(2-\sqrt{3}\,y)^2+y^2=2$$

$$\therefore\quad y=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}$$

$y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　のとき　$x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　のとき　$x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

よって

$z=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$　または　$z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$　…[答]

高松高等予備校