数学 202 その1

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -5,\ -2)$， $\overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ 0)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{33}$， $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2\cdot1+(-5)\cdot(-1)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{66}}$$ …[答]

(2) 単位ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とする。($a,\ b,\ c$ は実数)

$a^2+b^2+c^2=1$ …①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ だから $2a-5b-2c=0$ …②

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ だから $a-b=0$　$a=b$ …③

②，③より　$c=-\dfrac{3}{2}a$ …④

③，④を①に代入して

$$a^2+a^2+\left(-\frac{3}{2}a\right)^2=1$$

$$a^2=\frac{4}{17}$$

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}$$

よって

$$\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{3}{\sqrt{17}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$$

…[答]

(3) 点 H は平面 α 上にあるから

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ($s,\ t$ は実数)

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$=(0,\ 3,\ 2)+s(2,\ -5,\ -2)+t(1,\ -1,\ 0)$

$=(2s+t,\ 3-5s-t,\ 2-2s)$ …⑤

また　$\overrightarrow{DH}=k\vec{n}=k\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\ \dfrac{2}{\sqrt{17}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)$ $(k\neq0)$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+k\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$$

$$=(-1,\ -3,\ 3)+\left(\frac{2k}{\sqrt{17}},\ \frac{2k}{\sqrt{17}},\ -\frac{3k}{\sqrt{17}}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{2k}{\sqrt{17}},\ -3+\frac{2k}{\sqrt{17}},\ 3-\frac{3k}{\sqrt{17}}\right)$$ …⑥

⑤，⑥より

$$\begin{cases} 2s+t=-1+\dfrac{2k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑦ \\ 3-5s-t=-3+\dfrac{2k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑧ \\ 2-2s=3-\dfrac{3k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑨ \end{cases}$$

⑦～⑨より

$$\begin{cases} 7s+2t=5 \\ 19s+3t=16 \end{cases}$$

これを解くと　$s=1,\ t=-1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1,\ -1,\ 0)$

ゆえに　$\mathrm{H}(1,\ -1,\ 0)$ …[答]

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1,\ -1,\ 0)-(-1,\ -3,\ 3)=(2,\ 2,\ -3)$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$$

△ABCの面積をS，四面体ABCDの体積をVとすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{33\times2-7^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\sqrt{17}=\frac{17}{6}$$ …[答]

高松高等予備校

数学 202 その 2

(1)　$y'=2x$ より，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における法線 ℓ の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$$

$$=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

…[答]

(2)　ℓ と C の交点を求める。

$$x^2=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

$$x^2+\frac{1}{2t}x-\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$(x-t)\left\{x+\left(t+\frac{1}{2t}\right)\right\}=0$$

$$x=t,\quad -t-\frac{1}{2t}$$

よって　$\mathrm{Q}\left(-t-\frac{1}{2t},\ \left(t+\frac{1}{2t}\right)^2\right)$

$$\mathrm{PQ}^2=\left(t+t+\frac{1}{2t}\right)^2+\left\{\left(t+\frac{1}{2t}\right)^2-t^2\right\}^2$$

$$=\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{4t^2+1}{4t^2}\right)^2(4t^2+1)$$

よって　$\mathrm{PQ}=\dfrac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{4t^2}$

…[答]

(3)　(2)より　$\mathrm{PQ}^2=\dfrac{(4t^2+1)^3}{16t^4}$

ここで　$f(t)=\dfrac{(4t^2+1)^3}{t^4}$　$(t>0)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{4(4t^2+1)^2(2t^2-1)}{t^5}$$

$f'(t)=0$ のとき　$t^2=\dfrac{1}{2}$

$t>0$　より　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小で，最小値は

$$\mathrm{PQ}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ …[答]

高松高等予備校

数学 202 その 3

すべてのコインの面の中で 1，2，3，4 の面はそれぞれ 5 面ずつある。

(1)　$n=2$ のとき，すべての場合は ${}_{10}C_2\times 2^2=45\times 4$ 通り

$s=2$ となるのは 1 の面が 2 つのときで

$${}_5C_2=10$$

そのうち (1，1) のコインを用いる場合を除いて

$$\frac{10-1}{45\times 4}=\frac{1}{20}$$ …[答]

(2)　$s=4$ となるのは

1 と 3 のとき ${}_5C_1\times{}_5C_1=25$

このうち (1，3) のコインを用いる場合は 2 度数えたので

$$25-1=24 \text{ 通り}$$

2 と 2 のときは (1) の 1 と 1 の場合と同じで 9 通り

ゆえに $\dfrac{24+9}{45\times 4}=\dfrac{11}{60}$ …[答]

(3)　$n=3$ のとき，すべての場合は ${}_{10}C_3\times 2^3=960$ 通り

$s=5$ となるのは

1，1，3 のとき (2) と同様に考えて

$${}_5C_2\times{}_5C_1-5-4=41$$

1，2，2 のときも同様で 41 通り

ゆえに $\dfrac{41\times 2}{960}=\dfrac{41}{480}$ …[答]

(4)　すべての場合は ${}_{10}C_3\times 2^3=960$ 通り

1，1，1 とでるのは ${}_5C_2=10$ から

(1，1) を用いるものは 3 通り　$\therefore\ 10-3=7$ 通り

1，1，2 とでるのは，1，1，3 と同様で 41 通り

同様に 4 通りある 3 数とも同じものは 7 通り

12 通りある 2 数が同じものは 41 通り

よって，4 通りある 3 つとも異なるものは

$$\frac{960-7\times 4-41\times 12}{4}=110 \text{ 通り}$$

和が k となる場合の数を S_k と表すと，対称性より

$$S_3=S_{12},\ S_4=S_{11},\ S_5=S_{10},\ S_6=S_9,\ S_7=S_8 \text{ で}$$

S_3 は 1，1，1 で 7 通り

S_4 は 1，1，2 で 41 通り

S_5 は 1，1，3 と 1，2，2 で 82 通り

S_6 は 1，1，4 と 1，2，3 と，2，2，2 で 158 通り

S_7 は 1，2，4 と 1，3，3 と，2，2，3 で 192 通り

よって $s=7$ または $s=8$ のときが最大で

確率は $\dfrac{192}{960}=\dfrac{1}{5}$ …[答]

高松高等予備校

数学 202 その 4

(1)　$30=2\cdot3\cdot5$

より　$a_1=2,\ 3,\ 5$ は不適。

$a_1=7$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(7,\ 37,\ 67)$　適する。

$a_1=11$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(11,\ 41,\ 71)$　適する。

$a_1=13$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(13,\ 43,\ 73)$　適する。

$a_1=17$ と仮定すると $a_3=77=7\cdot11$ となり，不適。

$a_1=19$ と仮定すると $a_2=49=7^2$ となり，不適。

$a_1=23$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(23,\ 53,\ 83)$　適する。

$a_1=29$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(29,\ 59,\ 89)$　適する。

$a_1=31$ と仮定すると $a_3=91=7\cdot13$ となり，不適。

$a_1=37$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(37,\ 67,\ 97)$　適する。

$a_1\geqq41$ と仮定すると，$a_3\geqq101$ となり，$a_3\leqq100$ に反する。

[答]　$(7,\ 37,\ 67)$，$(11,\ 41,\ 71)$，$(13,\ 43,\ 73)$，$(23,\ 53,\ 83)$，
$(29,\ 59,\ 89)$，$(37,\ 67,\ 97)$ の 6 通り

(2)　Ⅰ) n が偶数のとき

$a_1>2$ より，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ はすべて奇数ゆえ

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ は 4 以上の偶数だから合成数である。

Ⅱ) n が奇数のとき

$n=2m+1$ となる正の整数 m が存在して

$$a_k+a_{2m+2-k}=2a_{m+1}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

だから $S_n=(2m+1)a_{m+1}$ となり，これも合成数である。　[証明終]

(3)　$a_1>3$ より $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ はすべて $6k\pm1$　(k は正の整数)
と表される。

$a_1=6a-1,\ a_2=6b+1$　($a,\ b$ は $a\leqq b$ である正の整数) と仮定すると

$$a_3=-6a+1+2(6b+1)=3(-2a+4b+1)$$

これは 5 以上の 3 の倍数ゆえ素数でなく，不適。

$a_1=6a+1,\ a_2=6b-1$　($a,\ b$ は $a<b$ である正の整数) と仮定しても

$a_3=3(-2a+4b+1)$ となり，やはり素数でなく，不適。

よって，公差 $d=a_2-a_1$ は 6 の倍数である。　[証明終]

(4)　初項 a_1 (a_1 は 5 以上の奇素数)，公差 $6c$ (c は正の整数) とおくと

$$n(a_1+3cn-3c)=100$$

これと $n \geqq 3$ より，n は 4 以上の 100 の約数である。
よって，$a_1+3c(n-1)$ は 14 以上の 100 の約数なので，下表を得る。

n	$a_1+3c(n-1)$	c	a_1
4	25	2	7
5	20		

また，(2)の考察より n は偶数だから，$n=4$ であり

$a_1=7$，$a_2=19$，$a_3=31$，$a_4=43$　適する。

[答]　(7，19，31，43) のみ。

高松高等予備校