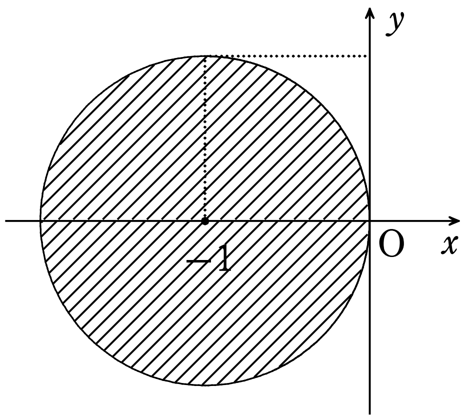
数学 201 その 1

(1)　$z+1=(x+yi)+1=(x+1)+yi$ なので

$|z+1|^2 \leqq 1$ より　$(x+1)^2+y^2 \leqq 1$

したがって，点 (-1) を中心とし半径 1 の円の周及び内部である。



図の斜線部
ただし，境界線を含む

…[終]

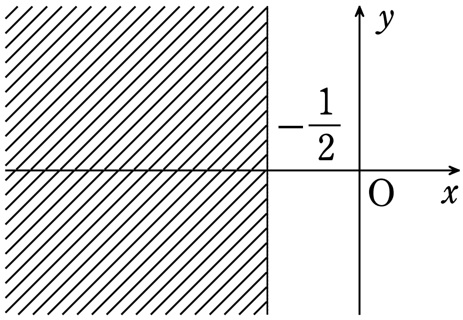
(2)　$\left|\dfrac{1}{z}+1\right|=\left|\dfrac{1+z}{z}\right|=\dfrac{|z+1|}{|z|}$　だから

$\dfrac{|z+1|}{|z|} \leqq 1$　より　$|z+1| \leqq |z|$

したがって

$(x+1)^2+y^2 \leqq x^2+y^2$ より　$2x+1 \leqq 0$

よって　$x \leqq -\dfrac{1}{2}$



図の斜線部
ただし，境界線を含む

…[終]

(3)　共通部分は図の斜線部である。

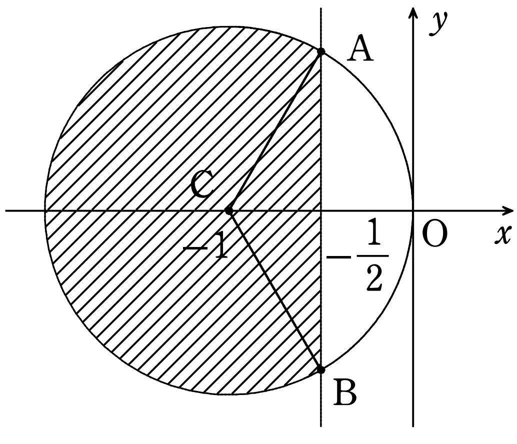
円と直線の交点を図のように A，B，円の中心を C とすると

$\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{2}{3}\pi$ なので

求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{4}{3}\pi+\triangle \mathrm{ACB}$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$$



…[答]

高松高等予備校

数学 201 その 2

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$ は等差数列なので，公差を d とすると

$$\begin{aligned} d&=(a_2+b_2)-(a_1+b_1)\\ &=(2-1)-(1+2)\\ &=-2 \end{aligned}$$

である。初項は

$$a_1+b_1=3$$

よって，一般項は

$$\begin{aligned} a_n+b_n&=3+(n-1)\cdot(-2)\\ &=5-2n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は等比数列なので，公比を r とすると

$$\begin{aligned} r&=\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}\\ &=-3 \end{aligned}$$

である。初項は

$$a_1-b_1=-1$$

よって，一般項は

$$\begin{aligned} a_n-b_n&=-1\cdot(-3)^{n-1}\\ &=-(-3)^{n-1} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

以上より

$$a_n+b_n=5-2n\ ,\quad a_n-b_n=-(-3)^{n-1}$$ …[答]

(2)　(1)で ①＋② より

$$2a_n=5-2n-(-3)^{n-1}$$

よって，一般項は

$$a_n=\frac{1}{2}\{5-2n-(-3)^{n-1}\}$$

同様に ①－② より

$$2b_n=5-2n+(-3)^{n-1}$$

よって，一般項は

$$b_n=\frac{1}{2}\{5-2n+(-3)^{n-1}\}$$

以上より

$$a_n=\frac{1}{2}\{5-2n-(-3)^{n-1}\}\ ,\quad b_n=\frac{1}{2}\{5-2n+(-3)^{n-1}\}$$ …[答]

(3)　(2)より

$$a_nb_n=\frac{1}{4}\{(5-2n)^2-(-3)^{2(n-1)}\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(5-2n)^2-9^{n-1}\}$$

$n\geqq 2$ で $a_nb_n<0$ となるには

$n\geqq 2$ で $(5-2n)^2<9^{n-1}\cdots$ Ⓐを示せばよい

[Ⅰ] $n=2$ のとき

左辺 $=1$，右辺 $=9$

なのでⒶは成り立つ

[Ⅱ] $n=k$ $(k\geqq 2)$ のきⒶが成り立つとすると

$$(5-2k)^2<9^{k-1}$$

が成り立つ

$n=k+1$ のとき

$$9^k=9\cdot 9^{k-1}$$
$$>9(5-2k)^2$$

ここで

$$9(5-2k)^2-\{5-2(k+1)\}^2$$
$$=(6k-15)^2-(2k-3)^2$$
$$=\{(6k-15)+(2k-3)\}\{(6k-15)-(2k-3)\}$$
$$=(8k-18)(4k-12)$$
$$=8(4k-9)(k-3)$$

$k=2$ のとき

$$8(4\cdot 2-9)(2-3)=8>0$$

$k\geqq 3$ のとき

$$4k-9\geqq 3,\quad k-3\geqq 0$$

なので

$$8(4k-9)(k-3)\geqq 0$$

よって，$k\geqq 2$ のとき

$$8(4k-9)(k-3)\geqq 0$$

したがって

$$9^k>9(5-2k)^2\geqq\{5-2(k+1)\}^2$$

となりⒶは $n=k+1$ のときも成り立つ

以上よりⒶは $n\geqq 2$ であるすべての n について成り立つので

$n \geqq 2$ のとき $a_n b_n < 0$ である。 …[証明終]

高松高等予備校

数学 201 その 3

(1)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & \left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right) \\ x^2+2x-1 & \left(x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\alpha<\dfrac{1}{2}<\beta$ としてよいので $x<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f'(x)=2x+2$$

点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 l は

$$y=(2\alpha+2)x-\alpha^2-1$$

$y=x^2-2x+1$ と $x=\beta$ で接するので

$$x^2-2x+1=(2\alpha+2)x-\alpha^2-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2(\alpha+2)x+\alpha^2+2=0$$

$D/4=0$ より $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ ， $\beta=\alpha+2=\dfrac{3}{2}$ …[答]

これは $\alpha<\dfrac{1}{2}<\beta$ を満たす。

$l:\ y=x-\dfrac{5}{4}$ …[答]

(2) $g(x)=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\begin{aligned} g'(x)&=\sqrt{x^2+1}+\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &=\frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} \\ &=\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &=2\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

ゆえに $a=2$ …[答]

(3) $y_1=x^2+2x-1$ ， $y_2=x^2-2x+1$ とすると

$$\frac{dy_1}{dx}=2x+2\ ,\quad \frac{dy_2}{dx}=2x-2$$

ゆえに $L_1=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(2x+2)^2}\,dx$ ， $L_2=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+(2x-2)^2}\,dx$

とすると

$L = L_1 + L_2$

$2x+2=s$ とすると $dx=\dfrac{1}{2}ds$ ，

x	$-\dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$
s	$1 \to 3$

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{1+s^2}\,ds$$
$$= \frac{1}{4}\left[s\sqrt{s^2+1} + \log\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{10} - \sqrt{2} + \log\frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$2x-2=t$ とすると $dx=\dfrac{1}{2}dt$,

x	$\dfrac{1}{2} \to \dfrac{3}{2}$
t	$-1 \to 1$

$$L_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \log\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)$$

ゆえに　$L = \dfrac{1}{4}\left\{3\sqrt{10} + \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})\right\}$ …[答]

高松高等予備校

数学 201 その 4

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -5,\ -2)$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -1,\ 0)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{33}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{2\cdot1+(-5)\cdot(-1)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{66}}$$ …[答]

(2)　単位ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とする。($a,\ b,\ c$ は実数)

$a^2+b^2+c^2=1$ …①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ だから $2a-5b-2c=0$ …②

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ だから $a-b=0$　$a=b$ …③

②，③より　$c=-\dfrac{3}{2}a$ …④

③，④を①に代入して

$$a^2+a^2+\left(-\frac{3}{2}a\right)^2=1$$

$$a^2=\frac{4}{17}$$

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}$$

よって

$$\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{3}{\sqrt{17}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$$

…[答]

(3)　点 H は平面 α 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ($s,\ t$ は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(0,\ 3,\ 2)+s(2,\ -5,\ -2)+t(1,\ -1,\ 0)\\&=(2s+t,\ 3-5s-t,\ 2-2s)\ \cdots⑤\end{aligned}$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\vec{n}=k\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\ \dfrac{2}{\sqrt{17}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)$ $(k\neq0)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}},\ -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)\\&=(-1,\ -3,\ 3)+\left(\frac{2k}{\sqrt{17}},\ \frac{2k}{\sqrt{17}},\ -\frac{3k}{\sqrt{17}}\right)\\&=\left(-1+\frac{2k}{\sqrt{17}},\ -3+\frac{2k}{\sqrt{17}},\ 3-\frac{3k}{\sqrt{17}}\right)\ \cdots⑥\end{aligned}$$

⑤，⑥より

$$\begin{cases} 2s+t=-1+\dfrac{2k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑦ \\ 3-5s-t=-3+\dfrac{2k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑧ \\ 2-2s=3-\dfrac{3k}{\sqrt{17}} & \cdots ⑨ \end{cases}$$

⑦～⑨より

$$\begin{cases} 7s+2t=5 \\ 19s+3t=16 \end{cases}$$

これを解くと　$s=1,\ t=-1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1,\ -1,\ 0)$

ゆえに　$\mathrm{H}(1,\ -1,\ 0)$ …[答]

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1,\ -1,\ 0)-(-1,\ -3,\ 3)=(2,\ 2,\ -3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$

△ABCの面積をS，四面体ABCDの体積をVとすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{33\times2-7^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\sqrt{17}=\frac{17}{6}$$ …[答]

高松高等予備校