数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　$a_2=r_1\cdot a_1=r_1$

$a_3=r_2\cdot a_2=r_2\cdot r_1$

$a_4=r_3\cdot a_3=r_3\cdot r_2\cdot r_1$　なので，$r_3\cdot r_2\cdot r_1=24$

r_n は 1，2，3，4 のいずれかなので，$(r_1,\ r_2,\ r_3)$ の選び方の総数は 4^3 通りである。この内，$24=2^3\times 3$ を満たす $(r_1,\ r_2,\ r_3)$ の組は，2，3，4 を並べたものである。

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{4^3}=\dfrac{3}{32}$　…[答]

(2)　$a_5=r_4\cdot r_3\cdot r_2\cdot r_1$ なので $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ は 1，2，3，4 または 2，2，2，3 を並べたものである。

よって，求める確率は　$\dfrac{4!+\dfrac{4!}{3!}}{4^4}=\dfrac{4!+4}{4^4}=\dfrac{7}{64}$　…[答]

(3)　$a_n=r_{n-1}\cdot r_{n-2}\cdot\ \cdots\ r_2\cdot r_1$ であり

$a_n=24$ となる $(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{n-1})$ の組は，次の 2 つの場合である。

i) 2，3，4 と残り $(n-4)$ 個がすべて 1

ii) 2 が 3 個，3 が 1 個，残り $(n-5)$ 個がすべて 1

よって，求める確率は

$$\frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-4)!}+\dfrac{(n-1)!}{3!(n-5)!}}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)+\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{6(n-1)(n-2)(n-3)+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3!\cdot 4^{n-1}}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)}{6\cdot 4^{n-1}}$$　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ について

$$\begin{cases} a+b+c=f(1) \\ a-b+c=f(-1) \\ c=f(0) \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=f(1)-f(0) \\ a-b=f(-1)-f(0) \\ c=f(0) \end{cases}$$

これらを a，b，c について解いて

$$a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)$$ …[答]

$$b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$$ …[答]

$$c=f(0)$$ …[答]

(2)　a，b，c は整数より，$f(-1)$，$f(-1)$，$f(0)$ も整数で

$|f(x)| \leqq 1$ だから，これらは 0 または 1 または -1

（ⅰ）　$f(0)=0$ のとき

$f(1)=f(-1)=1$ または $f(1)=f(-1)=-1$

つまり，$f(x)=x^2$ または $f(x)=-x^2$

（ⅱ）　$f(0)=1$ のとき

$f(1)=f(-1)=0$ または $f(1)=f(-1)=-1$

つまり，$f(x)=-x^2+1$ または $f(x)=-2x^2+1$

（ⅲ）　$f(0)=-1$ のとき

（ⅱ）と同様

$f(x)=x^2-1$ または $f(x)=2x^2-1$

以上より，$f(x)=\pm x^2$，$\pm(x^2-1)$，$\pm(2x^2-1)$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　$(x-2)^2+(y-2)^2=3^2$ だから，中心 P(2, 2)，半径 3　　…[答]

(2)　点 P から直線 l までの距離 d は

$$d=\frac{|6-8+a|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|a-2|}{5}$$

$d<3$ となるのは

$$\frac{|a-2|}{5}<3 \text{ より } -15<a-2<15$$

よって $-13<a<17$

ゆえに

$-13<a<17$ のとき共有点 2 個

$a=-13,\ 17$ のとき共有点 1 個

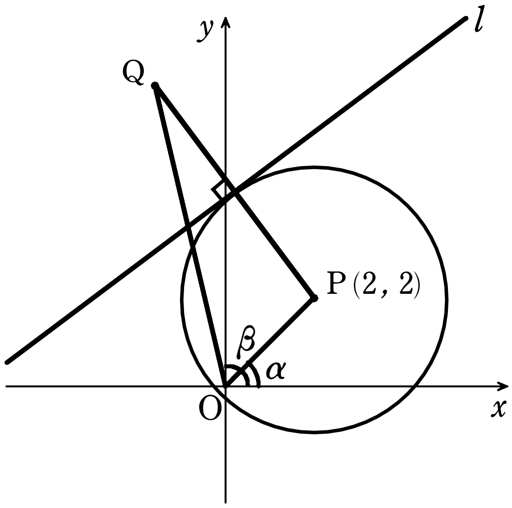
$a<-13,\ 17<a$ のとき共有点 0 個　　…[答]

(3)　(2)より，直線 l が円 C に接し，$a>0$ より $a=17$

Q$(p,\ q)$ とすると，PQ⊥l より

$$\frac{q-2}{p-2}\times\frac{3}{4}=-1$$

$\Leftrightarrow$　$4p+3q=14$　…①



線分 PQ の中点 $\left(\frac{p+2}{2},\ \frac{q+2}{2}\right)$ は

直線 l 上にあるので

$$\frac{3(p+2)}{2}-4\cdot\frac{q+2}{2}+17=0$$

$\Leftrightarrow$　$3p-4q=-32$　…②

①，②を解くと $p=-\frac{8}{5}$，$q=\frac{34}{5}$

直線 OP，OQ と x 軸の正の方向のなす角をそれぞれ α，β とすると

$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=-\frac{17}{4}$ で $\angle\mathrm{POQ}=\beta-\alpha$ なので

$$\tan\angle\mathrm{POQ}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{17}{4}-1}{1-\frac{17}{4}}=\frac{21}{13}$$　…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　$f(x)=|x^2-x|-s-x\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{f(t)-|t|\}dt$

$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{f(t)-|t|\}dt$ とすると

$$f(x)=|x^2-x|-s-Ax$$

ゆえに

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{|t^2-t|-s-At-|t|\}dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\{(t^2-t)+t\}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\{(t^2-t)+t\}dt-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}sdt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t^2dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^2dt-2\Big[st\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}-\left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{\frac{1}{2}}-s$$

$$=-s$$

ゆえに $f(x)=|x^2-x|-s+sx$ …[答]

(2)　$|x^2-x|-s+sx=0$ が異なる 3 実解をもつとき

$$\begin{cases} y=|x^2-x| & \cdots① \\ y=(1-x)s & \cdots② \end{cases}$$

①，②が異なる 3 個の共有点をもてばよいので

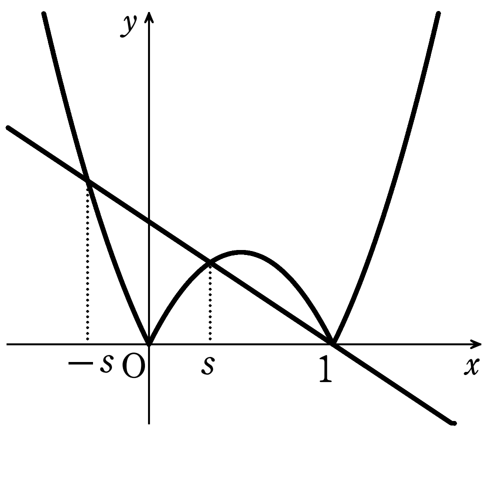
②と $y=-x^2+x$ が $0<x\leqq 1$ で異なる 2 つの共有点をもつときである

$-x^2-(s+1)x-s=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-(s+1)x+s=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)(x-s)=0$

①，②のグラフより $0<s<1$ …[答]



(3) $A(s)=\dfrac{(1+s)^3}{6}-\dfrac{1}{6}-\left\{\dfrac{1}{6}-\dfrac{(1-s)^3}{6}\right\}+\dfrac{(1-s)^3}{6}$

$=\dfrac{(1+s)^3}{6}-\dfrac{2}{6}+\dfrac{2(1-s)^3}{6}$

$=-\dfrac{1}{6}(s^3-9s^2+3s-1)$ …[答]

(4) $A'(s)=-\dfrac{1}{2}(s^2-6s+1)$

$A'(s)=0$ のとき $s=3\pm2\sqrt{2}$

$0<s<1$ における $A(s)$ の増減は以下のようになる。

s	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$A'(s)$		$-$	0	$+$	
$A(s)$		↘	極小	↗	

よって $A(s)$ は $s=3-2\sqrt{2}$ のとき最小となる。 …[答]

高松高等予備校