数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　袋Aの白玉の個数がはじめと変わらないのは，次の場合である。

〔1〕　袋 A から白玉，袋 B から白玉を取り出すとき

〔2〕　袋 A から赤玉，袋 B から赤玉を取り出すとき

であり，〔1〕，〔2〕は互いに排反である。

よって，求める確率は

$$\frac{2}{5}\times\frac{11}{34}+\frac{3}{5}\times\frac{24}{34}=\frac{11+36}{5\times17}=\frac{47}{85}$$ …[答]

(2)　(1)と同様に

$$\frac{2}{5}\times\frac{x+1}{x+y+1}+\frac{3}{5}\times\frac{y+1}{x+y+1}=\frac{47}{85}$$

分母を払って整理すると

$$17\times2(x+1)+17\times3(y+1)=47(x+y+1)$$

$$13x-4y=38 \cdots①$$

$x=2$，$y=-3$ は①の整数解の1つである。

よって　$13\cdot2-4\cdot(-3)=38 \cdots②$

①−②から　$13(x-2)=4(y+3)$

13 と 4 は互いに素だから，k を整数として

$$\begin{cases} x-2=4k \\ y+3=13k \end{cases}$$

よって　$x=4k+2$，　$y=13k-3$

$1\leqq x\leqq1000$，　$1\leqq y\leqq1000$ より

$1\leqq4k+2\leqq1000$

よって　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 249 \cdots③$

$1\leqq13k-3\leqq1000$

よって　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 77 \cdots④$

③，④ より　77組 …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

(1)　$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(r>0)$

$$\alpha-i=r\cos\theta+(r\sin\theta-1)i$$

$|\alpha-i|^2=1$ より

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-1)^2=1$$

$$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1$$

$$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2r\sin\theta=0$$

$r>0$ より

$$r=2\sin\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $r>0$ に適する

よって

$$|\alpha|=2\sin\theta$$

…[答]

(2)

$$\begin{aligned}\beta&=-\alpha+2i\\&=-2\sin\theta\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)+2i\\&=-2\sin\theta\cos\theta-2i\sin^2\theta+2i\\&=-2\sin\theta\cos\theta+2i(1-\sin^2\theta)\\&=-2\sin\theta\cos\theta+2i\cos^2\theta\\&=2\cos\theta(-\sin\theta+i\cos\theta)\\&=2\cos\theta\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$2\cos\theta>0$ より $|\beta|=2\cos\theta$，　$\arg\beta=\theta+\dfrac{\pi}{2}$　…[答]

(3)　$\beta=-\alpha+2i$ より β は α を原点に関して対称移動させたのちに，虚軸方向に $2i$ だけ平行移動した点を表すから，β は α が表す半円 $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を虚軸に関して対称移動した半円を表す。

C(i) とおくと △OPC において，

$$\mathrm{OC}=1,\ \mathrm{OP}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \angle\mathrm{COP}=\frac{\pi}{2}$$

より

$$\angle\mathrm{PCO}=\frac{\pi}{6}$$

題意をみたす α,β は直線 CP と円 $|z-i|=1$ との交点であるから

$$\angle \mathrm{COA} = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}$$

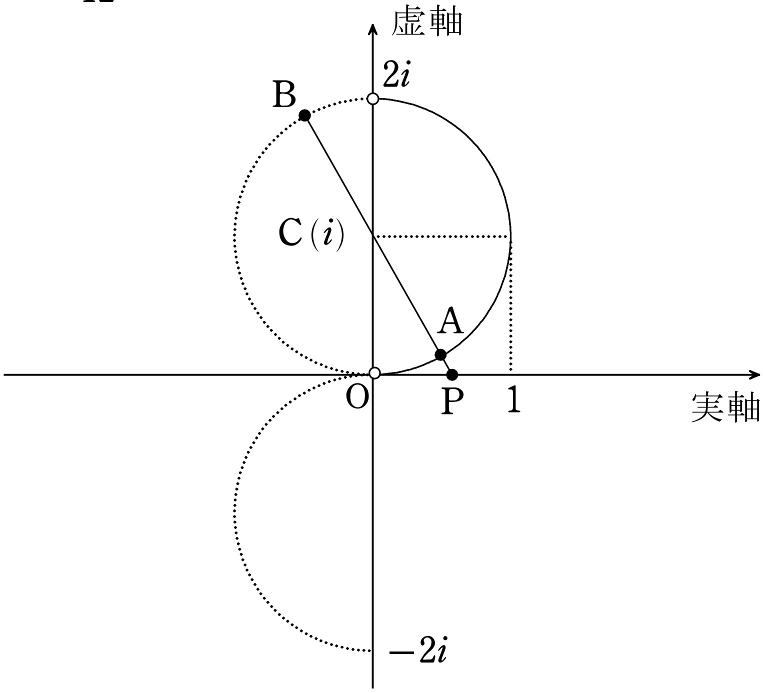
$$= \frac{5}{12}\pi$$

よって

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

…[答]



$\boxed{3}$

(1)　(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$P(t,\ 0,\ 0),\ Q(0,\ t,\ 1)$$

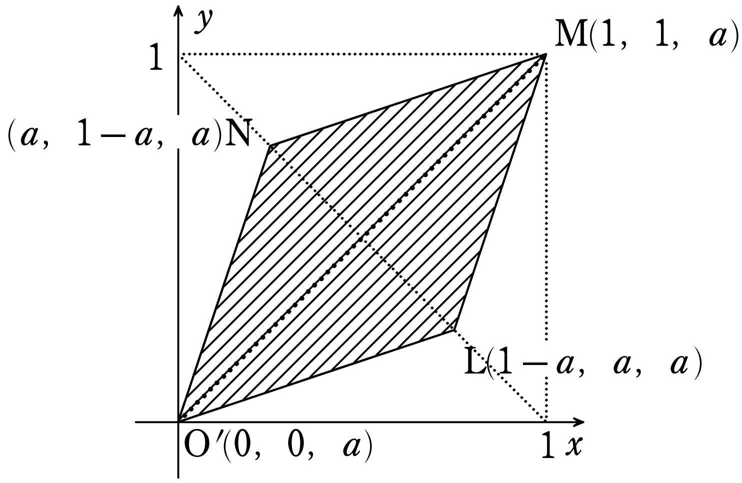
線分 PQ と平面 $z=a$ との交点を

$X(x,\ y,\ a)$ とすると

$PX : XQ = a : (1-a)$ より

$$x=(1-a)t,\quad y=at$$

$$\therefore\ y=\frac{a}{1-a}x\quad \left(0 \leqq a < \frac{1}{2}\right)$$



(平面 $z=a$ による切り口)

(ii)　同様にして，$1 \leqq t \leqq 2$, $2 \leqq t \leqq 3$, $3 \leqq t \leqq 4$ における点 X の軌跡を求めると四角形 O′LMN の辺上を動く。

よって，求める面積 S は

$$\mathrm{O'M}=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LN}&=\sqrt{\{a-(1-a)\}^2+(1-a-a)^2}\\&=\sqrt{2(1-2a)^2}\\&=\sqrt{2}(1-2a)\quad \left(0 \leqq a < \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{O'M}\times\mathrm{LN}\\&=1-2a\end{aligned}$$

…[答]

(2)　立体 K は平面 $z=\frac{1}{2}$ に関して対称なので

求める体積 V は

$$V=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2a)da$$

$$=2\Big[a-a^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

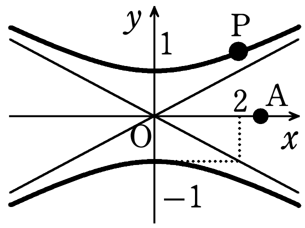
…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1)　$P_1(s,\ t)$ とすると，P_1 は C_1 上にあるから

$s^2-4t^2=-4$ …①



$AP_1{}^2=(s-a)^2+t^2$

①より $t^2=\dfrac{1}{4}s^2+1$

$$AP_1{}^2=s^2-2as+a^2+\frac{1}{4}s^2+1$$

$$=\frac{5}{4}\left(s-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2+1$$

$s=\dfrac{4}{5}a$ のとき $AP_1{}^2$ つまり AP_1 は最小となり最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$

$s=\dfrac{4}{5}a$ のとき $t^2=\dfrac{4}{25}a^2+1$　　$t=\pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2+1}$

よって　$P_1\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2+1}\right)$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$ …[答]

(2)　$P_2(p,\ q)$ とすると，P_2 は C_2 上にあるから

$p^2-4q^2=4$ …②

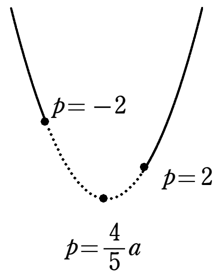
$AP_2{}^2=(p-a)^2+q^2$

②より $4q^2=p^2-4\geqq 0$ から $(p+2)(p-2)\geqq 0$

$p\leqq -2,\ 2\leqq p$ であり $q^2=\dfrac{1}{4}p^2-1$

$$AP_2{}^2=p^2-2ap+a^2+\frac{1}{4}p^2-1$$

$$=\frac{5}{4}\left(p-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2-1$$



〔1〕　$0<\dfrac{4}{5}a\leqq 2$ つまり $0<a\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき

$p\leqq -2,\ 2\leqq p$ において $AP_2{}^2$ つまり AP_2 は $p=2$ のとき最小となり

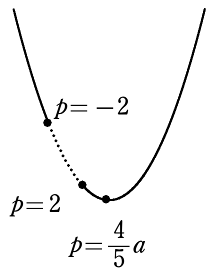
$$\text{最小値 } AP_2=\sqrt{(2-a)^2}=|2-a|=\begin{cases}2-a\ (0<a<2)\\ a-2\left(2\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}\right)\end{cases}$$

$p=2$ のとき $q=0$　　$P_2\ (2,\ 0)$

〔2〕　$2<\dfrac{4}{5}a$　　つまり　$\dfrac{5}{2}<a$ のとき

$p\leqq -2,\ 2\leqq p$ において　$AP_2{}^2$ つまり AP_2 が最小となるのは

$p=\dfrac{4}{5}a$のときで　最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2-1}$



$p=\dfrac{4}{5}a$のとき $q^2=\dfrac{4}{25}a^2-1$　　$q=\pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2-1}$

以上のことからAPの最小値を m とすると

$0<a<2$ のときP(2, 0)，　$m=2-a$

$2\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$ のときP(2, 0)，　$m=a-2$

$\dfrac{5}{2}<a$のとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2-1}\right)$のとき $m=\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2-1}$

…[答]

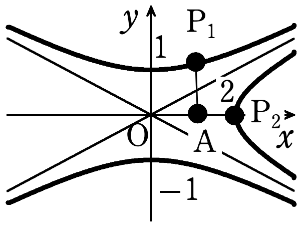
(3)　(1)，(2)から $2<a\leqq\dfrac{5}{2}$ …③

P(2, 0)で，AP$=a-2$ で最小

$a\leqq 2$ のとき$\mathrm{AP}_1>\mathrm{AP}_2$となるとき P(2, 0)で最小となる。

つまり $a\leqq 2$のとき $p=2$のとき $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}\geqq 2-a$

両辺を2乗しても同値



$$\frac{1}{5}a^2+1\geqq 4-4a+a^2$$

$$4a^2-20a+15\leqq 0$$

$4a^2-20a+15=0$とおくと $a=\dfrac{5\pm\sqrt{10}}{2}$ より

$$\frac{5-\sqrt{10}}{2}\leqq a\leqq\frac{5+\sqrt{10}}{2}\ \cdots④$$

④と$a\leqq 2$ より $\dfrac{5-\sqrt{10}}{2}\leqq a\leqq 2$　…⑤

③または⑤より $\dfrac{5-\sqrt{10}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$　　…[答]

高松高等予備校