[1]

$$5a_n=2S_n-2n+3 \qquad \cdots(*)$$

(1)　(*) に $n=1$ を代入する。

$$5a_1=2a_1-2+3$$

より，　$a_1=\dfrac{1}{3}$ …[答]

(*) に $n=2$ を代入する。

$$5a_2=2(a_1+a_2)-4+3$$

より，　$a_2=-\dfrac{1}{9}$ …[答]

(2)　$5a_{n+1}=2S_{n+1}-2(n+1)+3$

$$5a_n=2S_n-2n+3$$

辺々引くと，

$$5a_{n+1}-5a_n=2a_{n+1}-2$$

よって，　$a_{n+1}=\dfrac{5}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$ …[答]

(3)　(2)より

$$a_{n+1}-1=\frac{5}{3}(a_n-1)$$

と変形できる。

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{5}{3}$ の等比数列より

$$a_n-1=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=1-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots[答]$$

(4)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\right\}$

$$=n-\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n-1}{\frac{5}{3}-1}$$

$$=n+1-\left(\frac{5}{3}\right)^n \qquad \cdots[答]$$

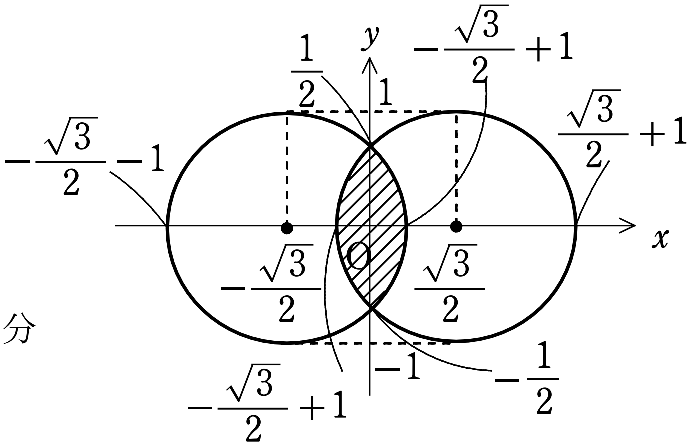
高松高等予備校

[2]

(1)　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

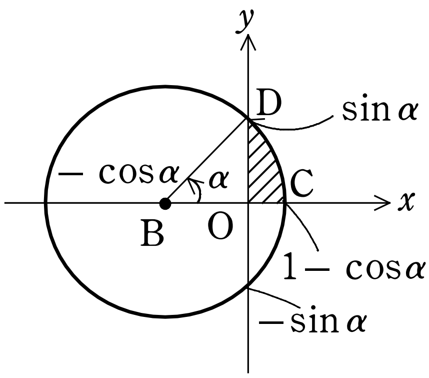
$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2\leqq 1\\ \left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2\leqq 1\end{cases}$$

求める領域は右図の斜線部分で境界を含む。



…[答]

(2)　$\begin{cases}(x-\cos\alpha)^2+y^2\leqq 1\\ (x+\cos\alpha)^2+y^2\leqq 1\end{cases}$



領域 D は x 軸，y 軸に関して対称

$(x+\cos\alpha)^2+y^2=1$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とすると，

領域 D の面積 S は

$S=4S_1$

B$(-\cos\alpha,\ 0)$，C$(1-\cos\alpha,\ 0)$，D$(0,\ \sin\alpha)$ として

$$S_1=(\text{扇形BCD})-(\triangle\text{OBD})$$

$$=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$$

よって

$$S=4S_1$$

$$=2\alpha-\sin 2\alpha$$

…[答]

(3)　D と x 軸のまわりに1回転させてできる立体の堆積を V とすると，

D は x 軸，y 軸に関して対称であるから

$$V=2\int_0^{1-\cos\alpha}\pi y^2dx=2\pi\int_0^{1-\cos\alpha}\{1-(x+\cos\alpha)^2\}dx$$

$$=2\pi\left[x-\frac{1}{3}(x+\cos\alpha)^3\right]_0^{1-\cos\alpha}$$

$$=2\pi\left(1-\cos\alpha-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3\alpha-\cos\alpha+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{3}(\cos^3\alpha-3\cos\alpha+2)$$

$$=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$C: x^2+9y^2=1$　$\cdots$①

　$l: y=t(x-3)$　$\cdots$②

①，②の共有点について $x^2+9t^2(x-3)^2=1$

$\Leftrightarrow$　$(1+9t^2)x^2-54t^2x^2+81t^2-1=0$　$\cdots$③

①，②が異なる 2 点を共有するから③の判別式を D とすると

$$D/4=27^2t^4-(1+9t^2)(81t^2-1)>0$$

つまり $72t^2<1$

よって $-\dfrac{1}{6\sqrt{2}}<t<\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$　$\cdots$[答]

また③の 2 解を α，β とすれば解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{54t^2}{1+9t^2}$$

$\mathrm{M}(x,\ y)$ とすれば $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{27t^2}{1+9t^2}$　$\cdots$④

M は②上にあるから $y=t\left(\dfrac{27t^2}{1+9t^2}-3\right)=\dfrac{-3t}{1+9t^2}$

ゆえに $\mathrm{M}\left(\dfrac{27t^2}{1+9t^2},\ \dfrac{-3t}{1+9t^2}\right)$　$\cdots$[答]

(2)　$\mathrm{M}(x,\ y)$ は (1) の②，④を満たす。

④より $x=3+\dfrac{-3}{1+9t^2}$

これより $x-3=\dfrac{-3}{1+9t^2}\neq 0$　$\cdots$⑤

ゆえに②より $t=\dfrac{y}{x-3}$，⑤より $(x-3)(1+9t^2)=-3$ だから

$$(x-3)\left\{1+9\cdot\frac{y^2}{(x-3)^2}\right\}=-3$$

$\Leftrightarrow$　$(x-3)^2+9y^2=-3(x-3)$

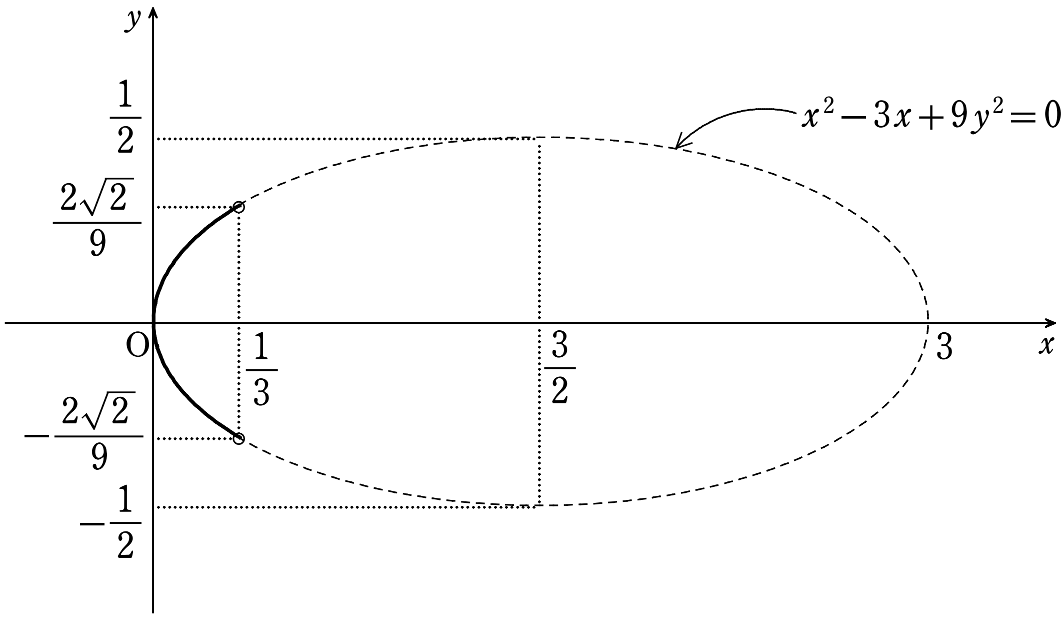
$\Leftrightarrow$　$x^2-3x+9y^2=0$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$　$\cdots$⑥

また (1) より $0\leqq 9t^2<\dfrac{1}{8}$ だから $\dfrac{8}{9}<\dfrac{1}{1+9t^2}\leqq 1$

ゆえに⑤より $0 \leqq x < \dfrac{1}{3}$　　…⑦

⑥，⑦より M の描く図形は下図の実線部(ただし，○印の点を除く)。

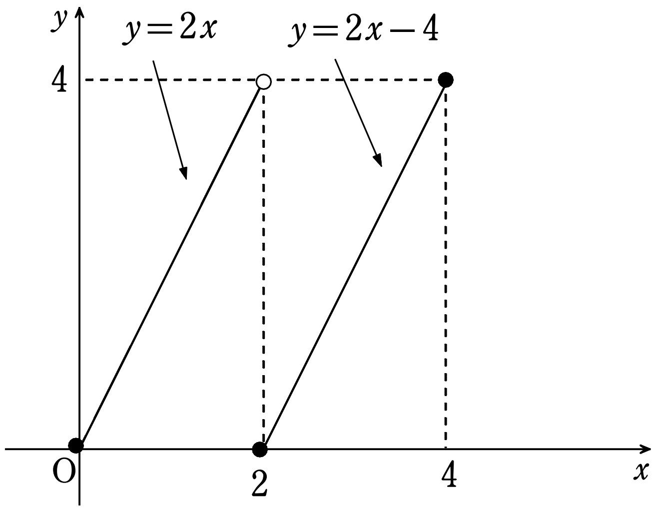


…[答]

高松高等予備校

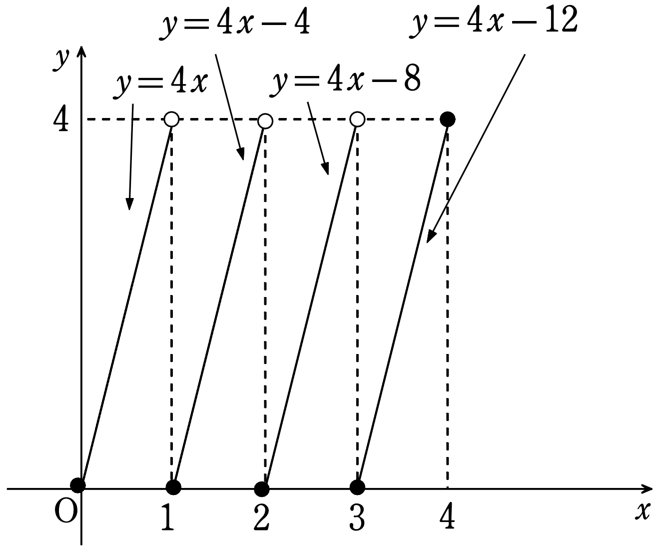
[4]

(1)



ただし，●印の３点 (0, 0), (2, 0), (4, 4)を含み，
○印の点 (2, 4) を含まない …[答]

(2)



ただし，●印の５点 (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 4)を含み，
○印の３点(1, 4), (2, 4), (3, 4) を含まない …[答]

(3) $y=\frac{1}{2}x+b$ が点 (4, 4) を通るとき b は最大となり

(0, 0) を通るとき最小となるので

$$0 \leqq b \leqq 2$$ …[答]

(4) $g(x)=ax+b$ とし

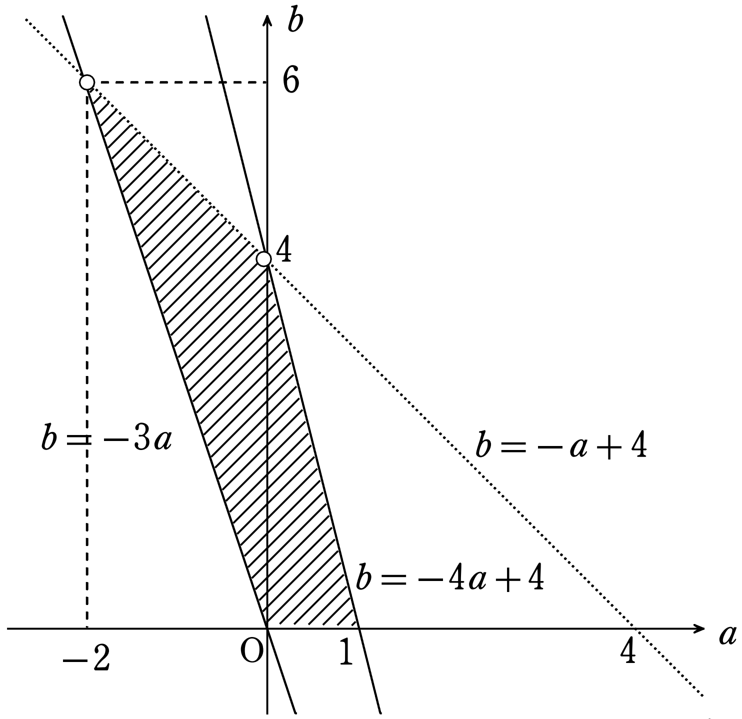
O(0, 0), A(1, 4), B(3, 0), C(4, 4)とすると

求める必要十分条件は線分OA，BCと共有点をもつことだから

$$g(0) \geqq 0,\ g(1) < 4,\ g(3) \geqq 0,\ g(4) \leqq 4$$

よって点 (a, b) の存在領域は下図の斜線部分

$b=-4a+4, b=-3a, b=0$ を含み，　$b=-a+4$ を含まず，
○印の２点 $(-2, 6), (0, 4)$ を除く



…[答]

高松高等予備校