[1]

$$5a_n=2S_n-2n+3 \qquad \cdots(*)$$

(1)　$(*)$ に $n=1$ を代入する。

$$5a_1=2a_1-2+3$$

より，　$a_1=\dfrac{1}{3}$　$\cdots$[答]

$(*)$ に $n=2$ を代入する。

$$5a_2=2(a_1+a_2)-4+3$$

より，　$a_2=-\dfrac{1}{9}$　$\cdots$[答]

(2)　$5a_{n+1}=2S_{n+1}-2(n+1)+3$

$$5a_n=2S_n-2n+3$$

辺々引くと，

$$5a_{n+1}-5a_n=2a_{n+1}-2$$

よって，　$a_{n+1}=\dfrac{5}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$　$\cdots$[答]

(3)　(2)より

$$a_{n+1}-1=\frac{5}{3}(a_n-1)$$

と変形できる。

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{5}{3}$ の等比数列より

$$a_n-1=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=1-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$　$\cdots$[答]

(4)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\right\}$

$$=n-\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n-1}{\frac{5}{3}-1}$$

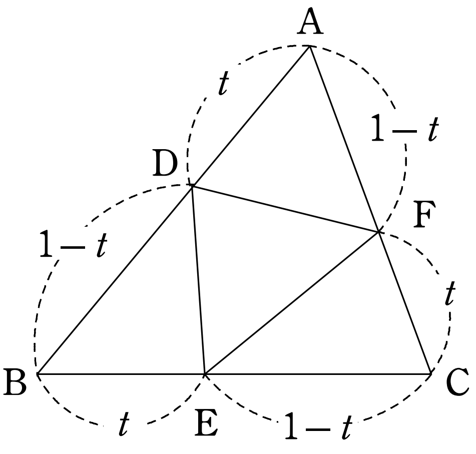
$$=n+1-\left(\frac{5}{3}\right)^n$$　$\cdots$[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　△ABCの面積が1より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}=1$$



このとき，△ADFの面積 (S_1) は

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\mathrm{A}\\&=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{AB})\cdot(1-t)\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}\\&=t(1-t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}\\&=t(1-t)\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$t(1-t)$　…[答]

(2)　$S=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{ADF}-\triangle\mathrm{BED}-\triangle\mathrm{CFE}$ である。

また，△BED の面積(S_2)，△CFE の面積(S_3)は，(1)と同様に考えると

$$S_2=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{BC})\cdot(1-t)\mathrm{BA}\cdot\sin\mathrm{B}=t(1-t)$$

$$S_3=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{CA})\cdot(1-t)\mathrm{CB}\cdot\sin\mathrm{C}=t(1-t)$$

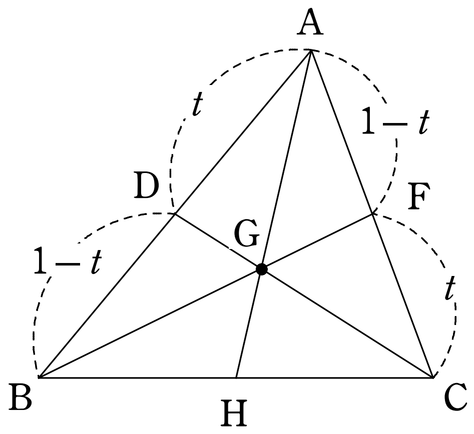
なので

$$S=1-3t(1-t)=3t^2-3t+1=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$0<t<1$ だから $t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$　…[答]

(3)　チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\times\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$



$\therefore\ \frac{t}{1-t}\times\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{t}{1-t}=1$　より

$$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=(1-t)^2:t^2$$

一方，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:(1-t)$ であり，

点 E と点 H が一致することから

$$(1-t)^2:t^2=t:(1-t)$$

よって，$t^3=(1-t)^3$ で　t は実数ゆえ

$$t=1-t\quad\therefore\ t=\frac{1}{2}$$

これは $0<t<1$ を満たすので適する。

以上より　$t=\dfrac{1}{2}$　…[答]

高松高等予備校

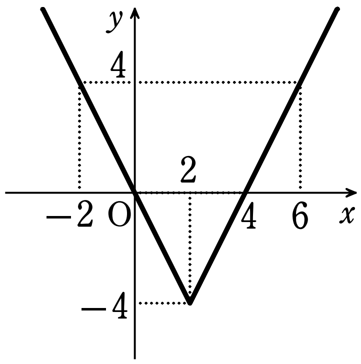
[3]

(1)　$f(x)=2|x-2|-4$

　　$x \geqq 2$ のとき $f(x)=2x-8$

　　$x<2$ のとき $f(x)=-2x$

$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり



…[答]

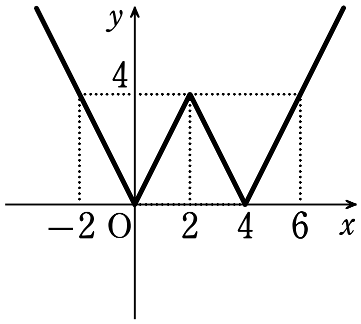
(2)　$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

$y=f(x)$ の $f(x)\leqq 0$ の部分を

x 軸で折り返したグラフと

$f(x)\geqq 0$ の部分をあわせたグラフで

右図のとおり



…[答]

(3)　$y=kx+2$　…(*) は点 (0, 2) を通る傾き k の直線であるから

(2) の $y=|f(x)|$ と相異なる 4 点で交わるのは

(*) が右図の①と②の間にあるときである。

①のとき (*) は (4, 0) を通るから

$$0=4k+2$$

$$k=-\frac{1}{2}$$

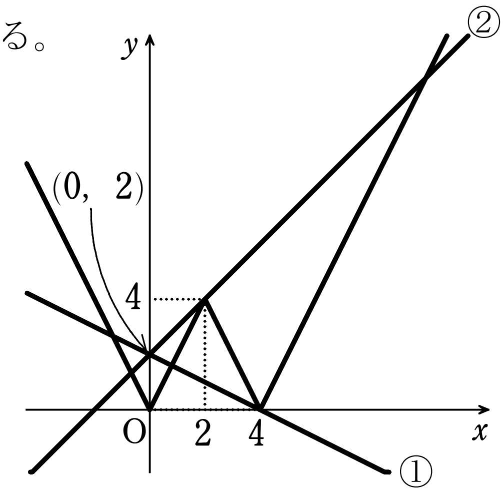
②のとき (*) は (2, 4) を通るから

$$4=2k+2$$

$$k=1$$

したがって，求める k の範囲は

$$-\frac{1}{2}<k<1$$



…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$f(x)=ax^2(x-b)$ とおける。

$f'(x)=3ax^2-2abx$

条件より

$f'(-1)=3a+2ab=1$　……①

$f(-1)=-a-ab$

これより，3次関数と直線 ℓ との接点は $(-1,\ -a-ab)$ だから

直線 ℓ の式は　$y=x+1-a-ab$

$g(x)=x+1-a-ab$ とおくと

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は点 $(1,\ f(1))$ で交わるから

$f(1)=g(1)$　$\therefore\ a-ab=2-a-ab$　$\therefore\ a=1$

よって，①より　$b=-1$

したがって　$f(x)=x^3+x^2$　…[答]

(2)　$f'(x)=3x^2+2x$

$=x(3x+2)$

$f'(x)=0$ として，$x=-\dfrac{2}{3}$，0

増減表は以下の通り

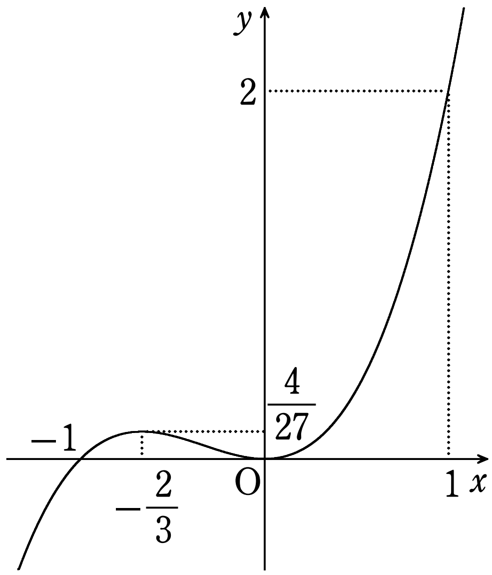
x		$-\dfrac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{27}$	↘	極小 0	↗

極大値：$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\left(-\dfrac{2}{3}+1\right)$

$=\dfrac{4}{27}$

極小値：$f(0)=0$

よって，グラフは右図



高松高等予備校