数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)　1回のじゃんけんで，Aが勝つ，引き分ける，負ける確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

$a_3=3$ となるのは，Aが1勝1敗1引き分け，3引き分け，の2つの場合である。

1勝1敗1引き分けの起こり方が3! 通りあるので，求める確率は

$$3!\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{6+1}{3^3}=\frac{7}{27}$$ …[答]

(2)　$a_5=5$ となるのは，Aが2勝2敗1引き分け，1勝1敗3引き分け，5引き分けの3つの場合であるから

$$({}_5C_2\times{}_3C_1+{}_5C_1\times{}_4C_3+{}_5C_5)\times\frac{1}{3^5}=(10\cdot3+5\cdot4+1)\times\frac{1}{3^5}$$

$$=\frac{51}{3^5}$$

$$=\frac{17}{81}$$ …[答]

(3)　AとBの得点を合わせると，各回とも2点ゆえ，5回の総得点は10点である。

したがって，$a_5=b_5$ となるのは $a_5=b_5=5$ のときで(2)より51通り

それ以外は，$a_5>b_5$ と $a_5<b_5$ の場合が同じ数ずつあるので，

$a_5>b_5$ となるのは

$$\frac{3^5-51}{2}=96\text{(通り)}$$

よって，$a_5\geqq b_5$ となる確率は

$$\frac{96+51}{3^5}=\frac{147}{3^5}=\frac{49}{81}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

a，b は正の数，$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$

(1)　$x_3=\dfrac{1+b}{a}$，$x_4=\dfrac{1+\dfrac{1+b}{a}}{b}=\dfrac{a+b+1}{ab}$，

$$x_5=\dfrac{1+\dfrac{a+b+1}{ab}}{\dfrac{b+1}{a}}=\dfrac{ab+a+b+1}{b(b+1)}=\dfrac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)}=\dfrac{a+1}{b},$$

$$x_6=\dfrac{1+\dfrac{a+1}{b}}{\dfrac{a+b+1}{ab}}=\dfrac{ab+a(a+1)}{a+b+1}=\dfrac{a(a+b+1)}{a+b+1}=a$$ …[答]

$$x_7=\dfrac{1+a}{\dfrac{a+1}{b}}=\dfrac{b(a+1)}{a+1}=b$$ …[答]

(2)　(1)から $\{x_n\}$ は $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=\dfrac{b+1}{a}$，$x_4=\dfrac{a+b+1}{ab}$，

$x_5=\dfrac{a+1}{b}$ を繰り返す。

x_n がすべて自然数となるとき，x_1，x_2 は自然数であるから a，b は自然数である。

$a=b$ のとき $x_3=1+\dfrac{1}{a}$ は自然数より $a=1$

　このとき $b=1$ となり，x_4，x_5 も自然数となる。

$a\fallingdotseq b$ のとき $a>b$ とすると a，b は自然数であるから $a\geqq b+1$

　$x_3=\dfrac{b+1}{a}$ が自然数であることと $0<\dfrac{b+1}{a}\leqq 1$ から $a=b+1$

　このとき $x_5=\dfrac{a+1}{b}=\dfrac{b+2}{b}=1+\dfrac{2}{b}$ が自然数となるから $b=1,\ 2$

　$b=1$ のとき $a=2$，　$b=2$ のとき $a=3$

　どちらの場合も x_4 は自然数となる。

$a<b$ のとき同様にして $a=1$ のとき $b=2$，$a=2$ のとき $b=3$

以上のことから

　$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$　…(*)　…[答]

逆に a，b が(*)のとき $x_1 \sim x_5$ は自然数となるから

x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はすべて自然数となる。

高松高等予備校

$\boxed{3}$

(1)　$z \neq 0$ と $z\overline{w} = \overline{z}w$ より

$$\frac{w}{z} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$$

$$= \overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$$

したがって $\dfrac{w}{z}$ は実数であるので，　$0, z, w$ は一直線上にある。　…[終]

(2)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，　$r > 0$ とおく

$|z-1| = 1$ より

$(r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta = 1$

$r^2 - 2r\cos\theta + 1 = 1$

$r(r - 2\cos\theta) = 0$

$r \neq 0$ より

$$r = 2\cos\theta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって

$z = (2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$　…[答]

$\dfrac{w}{z} = k$ (kは実数) とおくと，　$w = kz$

$|w - z| = 2$

$|kz - z| = 2$

$|k-1||z| = 2$

$$|k-1| = \frac{2}{|z|}$$

$$|k-1| = \frac{2}{2\cos\theta}$$

$$k - 1 = \pm\frac{1}{\cos\theta}$$

$$k = 1 \pm \frac{1}{\cos\theta}$$

したがって

$$w = \left(1 \pm \frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot(2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$= 2(\cos\theta \pm 1)(\cos\theta + i\sin\theta)$　…[答]

(3)　w の虚部は

$(2\sin\theta)(\cos\theta \pm 1)$

また $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より最大値を与える虚部は

$(2\sin\theta)(\cos\theta + 1)$

ここで

$f(\theta) = (2\sin\theta)(\cos\theta + 1)$

とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= (2\cos\theta)(\cos\theta + 1) + (2\sin\theta)(-\sin\theta) \\
&= 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) \\
&= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\
&= 2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)
\end{aligned}
$$

$f'(\theta) = 0$ のとき

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$,　$\cos\theta = -1$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

よって増減表は

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

となる。

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき $f(\theta)$ は最大になり最大値は

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + 1\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

…[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(1,\ -1)$

なる実数 k が存在するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ t^2-t+1)+k(1,\ -1)$$

点 Q は $y=x$ 上にあるから

$$k+t=t^2-t+1-k$$

よって　$k=\dfrac{(t-1)^2}{2}$

だから　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{t^2+1}{2},\ \dfrac{t^2+1}{2}\right)$

よって　$u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t^2+1)$　…[答]

(2) (1)の考察より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{(t-1)^2}{2}(1,\ -1)$

だから　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-1)^2$　…[答]

(3) $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$, $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$として，折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1$ と C で囲まれた部分を回転してできる回転体の体積 V_1 は

$$V_1=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2du$$

u	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\sqrt{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

，　$\dfrac{du}{dt}=\sqrt{2}\,t$ より

$$V_1=\pi\int_0^1\frac{1}{2}(t-1)^4(\sqrt{2}\,t)dt$$

$s=t-1$ とおくと

t	$0\longrightarrow 1$
s	$-1\longrightarrow 0$

，　$\dfrac{ds}{dt}=1$ より

$$V_1=\pi\int_{-1}^0\frac{\sqrt{2}}{2}s^4(s+1)ds$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{1}{6}s^6+\frac{1}{5}s^5\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

△O P_0 Q_0 を回転した回転体の体積 V_2 は

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

よって，求める体積は

$$V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi+\frac{\sqrt{2}}{12}\pi=\frac{\sqrt{2}}{10}\pi$$ …[答]

高松高等予備校