

[1]

(1) $\angle DAE = 60^\circ$, $\angle AED = 90^\circ$ より

$$AE = \frac{1}{2}AD = 3$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AE} = \frac{3}{t}\vec{a}$$

…[答]

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC} = k(\vec{a} + \vec{b}) \quad (k \text{ は実数}) \text{ とおく。}$$

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ より}$$

$$\{k(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3t \text{ より}$$

$$(3t + 36)k = 36$$

$$k = \frac{12}{t + 12}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AF} = \frac{12}{t + 12}(\vec{a} + \vec{b})$$

…[答]

(2) 点 F は線分 AC 上にあるので

$$\angle DEF < \angle DEB = 90^\circ$$

$\angle ADF = 90^\circ$ なので

$$\angle EDF < 90^\circ$$

よって $\triangle DEF$ が直角三角形のとき

$$\angle DFE = 90^\circ$$

このとき $AD \parallel EF \parallel BC$ なので

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

(1) より

$$\frac{3}{t} = \frac{12}{t + 12}$$

$$t = 4$$

…[答]

高松高等予備校

[2]

(1) 点 P が時刻 2 で頂点 A にいる場合は

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow A \\ A \rightarrow C \rightarrow A \\ A \rightarrow D \rightarrow A \end{cases}$$

よって確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

したがって

$$a_2 = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

…[答]

(2) 点 P が時刻 3 で頂点 A にいる場合は

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \\ \quad \searrow D \rightarrow A \\ A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \\ \quad \searrow D \rightarrow A \\ A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \\ \quad \searrow C \rightarrow A \end{array}$$

よって確率は

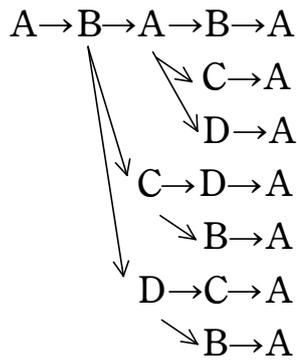
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{75} \\ \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{75} \\ \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{75} \end{cases}$$

したがって

$$a_3 = \frac{8}{75} + \frac{8}{75} + \frac{8}{75} = \frac{8}{25}$$

…[答]

(3) 点 P が時刻 1 で頂点 B にあり、かつ時刻 4 に頂点 A にいる場合は



よって確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{375}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{375}$$

したがって、点 P が時刻 1 で頂点 B にあり、かつ時刻 4 で頂点 A にいる確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{375} + \frac{2}{375} + \frac{2}{375} + \frac{8}{375} + \frac{4}{375} + \frac{8}{375} + \frac{4}{375} \\ &= \frac{29}{375} \end{aligned}$$

時刻 1 で頂点 C, D にある場合も同様に考えて

$$a_4 = \frac{29}{375} + \frac{29}{375} + \frac{29}{375} = \frac{29}{125}$$

…[答]

高松高等予備校

[3]

(1) $f(x) = (a^2 + 1)x^2 + 4ax$

について

$$f(x) = (a^2 + 1)\left(x + \frac{2a}{a^2 + 1}\right)^2 - \frac{4a^2}{a^2 + 1} \dots \textcircled{1}$$

だから、すべての実数 x について $f(x) > -2$ が成り立つ条件は

$$-\frac{4a^2}{a^2 + 1} > -2 \dots \textcircled{2}$$

$a^2 + 1 > 0$ だから $\textcircled{2}$ は

$$4a^2 < 2(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 1$$

となる。これより $-1 < a < 1$

…[答]

(2) $\frac{2a}{a^2 + 1} = t$

とおくと

i) $a = 0$ のとき $t = 0$

ii) $a \neq 0$ とする。 $t \neq 0$ だから

$$ta^2 + t = 2a$$

$$\Leftrightarrow ta^2 - 2a + t = 0$$

a は実数ゆえ、判別式を D として

$$\frac{D}{4} = 1 - t^2 \geq 0$$

これより $-1 \leq t \leq 1$ ($t \neq 0$)

i), ii) より $-1 \leq t \leq 1$

…[証明終]

(3) (2) より $-1 \leq \frac{2a}{a^2 + 1} \leq 1$

これと $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} n \leq -1 \text{ のとき } f(n) \geq f(-1) \\ n \geq 1 \text{ のとき } f(n) \geq f(1) \end{cases}$$

だから $f(n)$ の最小値は $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ のいずれかである。

よって、すべての整数 n に対して $f(n) > -2$ となる条件は

$$\begin{cases} f(-1) > -2 \\ f(0) > -2 \\ f(1) > -2 \end{cases}$$

すなわち

$$\textcircled{3} \begin{cases} a^2+1-4a > -2 & \dots\text{ア} \\ 0 > -2 & \dots\text{イ} \\ a^2+1+4a > -2 & \dots\text{ウ} \end{cases}$$

が成り立つことであるが、イは明らかだから、③は

$$\begin{cases} a^2-4a+3=(a-1)(a-3) > 0 & \dots\text{ア} \\ a^2+4a+3=(a+1)(a+3) > 0 & \dots\text{ウ} \end{cases}$$

が成り立つことであり、これを解いて

$$a < -3, -1 < a < 1, 3 < a$$

…[答]

である。

高松高等予備校

[4]

$$f(x) = 8^x + 4^x + 4^{-x} + 8^{-x}$$

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ …①

① の両辺を 2 乗すると

$$t^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$$

$$\therefore 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2 \quad \dots[\text{答}]$$

① の両辺を 3 乗すると

$$\begin{aligned} t^3 &= 8^x + 3(2^x + 2^{-x}) + 8^{-x} \\ &= 8^x + 3t + 8^{-x} \end{aligned}$$

$$\therefore 8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t \quad \dots[\text{答}]$$

(2) $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ であるから相加平均と相乗平均の関係より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad (\text{等号は } 2^x = 2^{-x} \text{ すなわち } x = 0 \text{ のとき})$$

$$\text{よって } t \geq 2 \quad \dots[\text{答}]$$

(3) (1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^3 - 3t) + (t^2 - 2) \\ &= t^3 + t^2 - 3t - 2 \end{aligned}$$

ここで

$$g(t) = t^3 + t^2 - 3t - 2 \quad (t \geq 2) \text{ とおく。}$$

$$g'(t) = 3t^2 + 2t - 3$$

$$= 3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}$$

$$t \geq 2 \text{ より } g'(t) > 0$$

よって, $t \geq 2$ のとき $g(t)$ は単調増加

したがって, $t = 2$ のとき最小値 $g(2) = 4$ をとる。 …[答]

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 2 \text{ より, } (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$(2^x - 1)^2 = 0 \text{ より, } 2^x = 1$$

$$x = 0 \quad \dots[\text{答}]$$