数学 202 その 1

(1)　$x>0$ のとき

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

だから

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[終]

(2)　(1) より $k \geqq 1$ のとき

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}$$

だから

$$2(\sqrt{n+1}-1)<S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \cdots①$$

(1) より $k \geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

だから

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{n}-1)$$

すなわち

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1 \quad \cdots②$$

①，②より

$$2(\sqrt{n+1}-1)<S_n<2\sqrt{n}-1$$

[終]

(3)　(2) の結果より

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\frac{S_n}{\sqrt{n}}<2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2,\ \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$$

だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=2 \quad \cdots[答]$$

高松高等予備校

数学 202 その 2

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta$ だから　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\cos\theta$

$x>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から，両辺正より 2 乗しても同値であるから，両辺を 2 乗して整理すると

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)(2\cos^2\theta-1)=2$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\theta\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で $2\cos^2\theta-1\fallingdotseq 0$だから

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{2\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos 2\theta}$$ …[終]

(2)　$y=\dfrac{1}{x}$ は直線 $y=x$ に関して対称である。

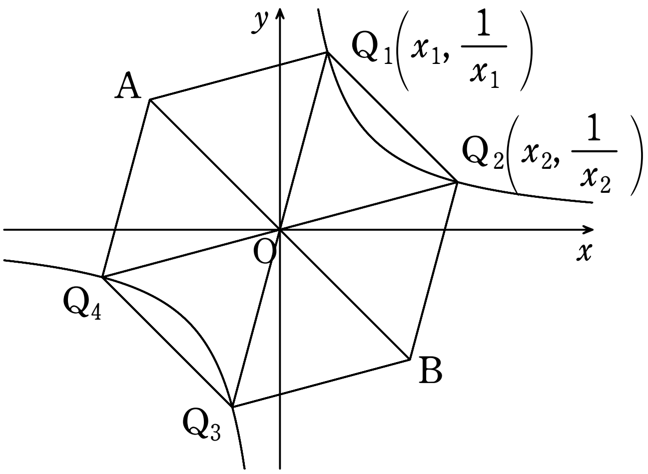
よって，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ を満たす Q はちょうど 2 個存在する。　…[終]

この 2 点をQ，Q′とおくと $\angle\mathrm{QOQ'}=\dfrac{\pi}{3}$ で，OQ＝OQ′だから△OQQ′は正三角形となる。

いま　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=4$ より，$\mathrm{Q}\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$に対して

$$\mathrm{QQ'}=\mathrm{OQ}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}=2$$ …[答]

(3)



題意の正六角形が存在するとき，△ $\mathrm{Q_1OQ_2}$ は正三角形となるので

$\angle \mathrm{Q_1OQ_2}=\dfrac{\pi}{3}$ より， $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

このとき $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4$ より $x^4-4x^2+1=0$ から $x^2=2\pm\sqrt{3}$

$0<x_1<x_2$ より $x_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$x_1=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

ゆえに $\mathrm{Q_1}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$， $\mathrm{Q_2}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$， $\overrightarrow{\mathrm{OQ_4}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}$

これより $\mathrm{Q_3}\left(-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mathrm{Q_4}\left(-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ_4}}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

よって $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$， $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ …[答]

高松高等予備校

数学 202 その 3

(1)　$C: y=e^{3x}$

について，　$y'=3e^{3x}$

だから，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{3t})$ における接線の方程式は

$$y=3e^{3t}(x-t)+e^{3t}$$
$$=e^{3t}(3x-3t+1)$$

法線の方程式は

$$y=-\frac{x-t}{3e^{3t}}+e^{3t}$$
$$=-\frac{x-t-3e^{6t}}{3e^{3t}}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(t-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{R}(t+3e^{6t},\ 0)$

である。ゆえに

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=e:9$$

より，$e\,\mathrm{PR}=9\,\mathrm{PQ}$

$$\Leftrightarrow\quad e^2\cdot 9e^{12t}\cdot\left(1+\frac{1}{9e^{6t}}\right)=81\cdot\frac{1}{9}\cdot(1+9e^{6t})$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{6t+2}=9$$

よって，　$t=\dfrac{\log 3-1}{3}$　…[答]

(2)　(1) より

$$S(t)=\int_{t-\frac{1}{3}}^{t}e^{3x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{t-\frac{1}{3}}^{t}$$
$$=\frac{1}{3}e^{3t-1}(e-1)$$

だから，　$S(t)=e-1$ となる条件は

$$e^{3t-1}=3$$

よって　$t=\dfrac{\log 3+1}{3}$　…[答]

(3)　$\mathrm{A}(t,\ 0)$ として

$$(\triangle \mathrm{PAQ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3t} = \frac{e^{3t}}{6}$$

$$(\triangle \mathrm{PAR}) \backsim (\triangle \mathrm{QAP})$$

であって，相似比は　$e^{3t} : \dfrac{1}{3} = 3e^{3t} : 1$

だから，面積比は

$$9e^{6t} : 1$$

よって

$$T(t) = (\triangle \mathrm{PQR}) = \frac{(1+9e^{6t})e^{3t}}{6}$$

これと (2) の考察より

$$\frac{e^{6t}S(t)}{T(t)} = \frac{2e^{6t-1}(e-1)}{1+9e^{6t}} = \frac{2(e-1)}{(e^{-6t}+9)e}$$

だから

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{6t}S(t)}{T(t)} = \frac{2(e-1)}{9e}$$ …[答]

数学 202 その 4

(1)　１回目の勝負で優勝者が決まるのは

目が２種類で大きい方の目が１人のときだから

その確率は

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=15n\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \cdots[\text{答}]$$

(2)　１回の勝負で２種類の目を出すのは

$${}_6\mathrm{C}_2\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=15\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

１回の勝負で誰も敗退しないのは，この余事象であるから

求める確率は

$$1-15\left(\frac{1}{3}\right)^n+30\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \cdots[\text{答}]$$

(3)　$k=2,3,\cdots,n-1$ として１回目に k 人残る確率は

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=15\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

２回目に k 人が１人になる確率は

(1)の結果は $n=2$ のときも成り立つから， $n=k$ として，

$$15k\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

したがって，１回目の勝負では敗退する人はでるが優勝者が決まらず，２回目の勝負で優勝者が決まる確率を P とすると

$$\begin{aligned}P&=\sum_{k=2}^{n-1}15\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot15k\left(\frac{1}{6}\right)^k\\&=15^2\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\sum_{k=2}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned}k\,{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\&=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

であるから

$$P=15^2\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\sum_{k=2}^{n-1}n\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

$$=\frac{15^2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n n\sum_{k=2}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

ところで

$$\sum_{k=2}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

$$={}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)+{}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}$$

$$={}_{n-1}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$-{}_{n-1}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0-{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{6}\right)^{n-1}-1-\frac{1}{6^{n-1}}$$

したがって

$$P=\frac{75n}{2\cdot 6^n}\left\{\left(1+\frac{1}{6}\right)^{n-1}-1-\frac{1}{6^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{75n}{2\cdot 6^n}\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}-1-\frac{1}{6^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{25n}{4\cdot 6^{n-1}}\cdot\frac{7^{n-1}-6^{n-1}-1}{6^{n-1}}$$

$$=\frac{25n(7^{n-1}-6^{n-1}-1)}{4\cdot 36^{n-1}}$$ …[答]

高松高等予備校