数学　２０２　その１

(1)

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}+2S_{n+1}=3\cdot 2^n \\ -) & a_n \ + \ 2S_n=3\cdot 2^{n-1} \\ \hline & a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}=3\cdot(2\cdot 2^{n-1})-3\cdot 2^{n-1} \end{array}$$

$\therefore \quad 3a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{n-1}$ …[答]

(2)　(1) の両辺を $3\cdot 2^{n+1}\ (\neq 0)$ でわると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{2\cdot 2^n}=\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{4}$$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=b_{n+1}$ だから

$$b_{n+1}-\frac{1}{6}b_n=\frac{1}{4}$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{4}$$

変形すると

$$b_{n+1}-\frac{3}{10}=\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{10}\right)$$

また，$a_1+2S_1=3$ であるから

$$a_1+2a_1=3$$

$$\therefore \quad a_1=1$$

よって　$b_1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{a_1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{5}$

したがって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{10}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列で

$$b_n-\frac{3}{10}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n=\frac{3}{10}+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$=\frac{3}{10}\left(1+\frac{4}{6^n}\right)$$

$a_n=2^n\cdot b_n$ であるから

$a_n=\dfrac{3}{10}\left(2^n+\dfrac{4}{3^n}\right)$ …[答]

(3)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \frac{3}{10}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^k + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} \\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1} + \frac{3}{10}\cdot 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{5}(2^n-1) + \frac{3}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\
&= \frac{3}{5}\left(2^n - \frac{1}{3^n}\right)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
3^{n-1}S_n &= \frac{3^n}{5}\left(2^n - \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{1}{5}(6^n - 1)
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}S_k \\
&= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(6^k - 1) \\
&= \frac{1}{5}\left(6\cdot\frac{6^n-1}{6-1} - n\right) \\
&= \frac{6^{n+1} - 5n - 6}{25}
\end{aligned}
$$

…[答]

高松高等予備校

数学　２０２　その２

(1)　B は Aを O のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転して，O からの距離を $\dfrac{1}{\mathrm{OA}}$ 倍したものだから

$$\beta=\alpha\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{|\alpha|}$$

$$=-\frac{\alpha}{|\alpha|}i$$ …[答]

(2)　$\gamma=k\alpha$ (kは実数) とおける。

CA=CB だから，$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$

$$\therefore\quad |\alpha-k\alpha|=\left|-\frac{\alpha}{|\alpha|}i-k\alpha\right|$$

$|\alpha|>0$ で両辺をわると

$$|k-1|=\left|k+\frac{i}{|\alpha|}\right|$$

$$\therefore\quad (k-1)^2=k^2+\frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$\therefore\quad k^2-2k+1=k^2+\frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\alpha|^2}\right)$$

$$\therefore\quad \gamma=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\alpha|^2}\right)\alpha$$ …[答]

(3)　$z=ti$ (tは0でない実数) とおける。

$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\frac{\beta-ti}{\alpha-ti}=\frac{-\frac{\alpha}{|\alpha|}i-ti}{\alpha-ti}$$

$$=\frac{\frac{\alpha}{|\alpha|}+t}{\alpha-ti}\cdot(-i)$$

は純虚数である。

$$\therefore\ \frac{\frac{\alpha}{|\alpha|}+t}{\alpha-ti}=\frac{1}{|\alpha-ti|^2}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}+t\right)\left(\overline{\alpha}+ti\right)$$

$$=\frac{1}{|\alpha||\alpha-ti|^2}(\alpha+|\alpha|t)(\overline{\alpha}+ti)$$

は実数である。

$$\therefore\ (\alpha+|\alpha|t)(\overline{\alpha}+ti)=\overline{(\alpha+|\alpha|t)(\overline{\alpha}+ti)}$$

これを整理して，$t\neq 0$ であると

$$|\alpha|\overline{\alpha}+\alpha i+|\alpha|ti=|\alpha|\alpha-\overline{\alpha}i-|\alpha|ti$$

$$2|\alpha|ti=|\alpha|(\alpha-\overline{\alpha})-(\alpha+\overline{\alpha})i$$

$|\alpha|>0$ より

$$t=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}-\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2|\alpha|}$$

$$\therefore\ z=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}-\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2|\alpha|}i$$ …[答]

高松高等予備校

数学　２０２　その３

(1)　$x=\cos^n t$，$y=\sin^4 t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$において

$\sin t\fallingdotseq 0$，$\cos t\fallingdotseq 0$ すなわち $t\fallingdotseq 0$，$\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=n\cos^{n-1}t\,(-\sin t)=-n\sin t\cos^{n-1}t$$

$$\frac{dy}{dt}=4\sin^3 t\cos t$$

から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{n\cos^n t}$$

$t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n},\quad y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{9}{16},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{n\left(\frac{1}{2}\right)^n}=-\frac{3\cdot 2^n}{4n}$$

接線 l_n の方程式は　$y-\dfrac{9}{16}=-\dfrac{3\cdot 2^n}{4n}\left(x-\dfrac{1}{2^n}\right)$

よって　$y=-\dfrac{3\cdot 2^n}{4n}x+\dfrac{3}{4n}+\dfrac{9}{16}$　…[答]

(2)　$n=2$ のとき l_2 は

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{16}$$

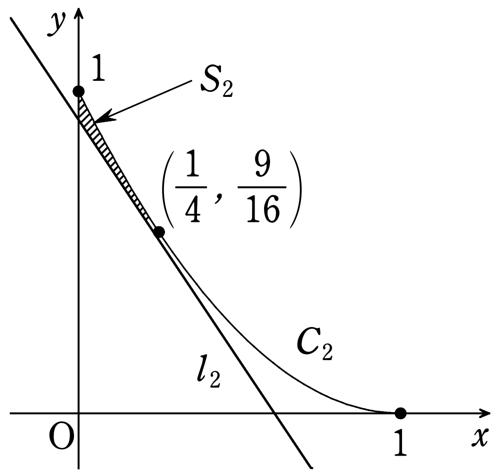
接点は$\left(\dfrac{1}{4}，\dfrac{9}{16}\right)$

曲線 C_2 は

$$\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}\quad\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

であり

$$y=(\sin^2 t)^2=(1-\cos^2 t)^2=(1-x)^2$$



よって

$$S_2=\int_0^{\frac{1}{4}}\left\{(x-1)^2-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{15}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=\frac{1}{192}$$ …[答]

(3)　曲線 C_n は

$$\begin{cases} x=\cos^n t \\ y=\sin^4 t \end{cases} \quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

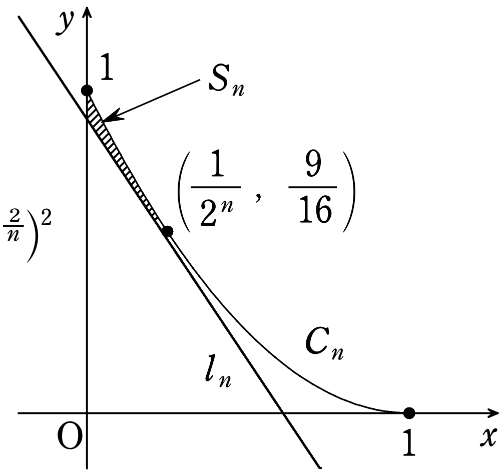
であり

$$y=(\sin^2 t)^2=(1-\cos^2 t)^2=\left(1-x^{\frac{2}{n}}\right)^2$$

また

$$l_n:\ y=-\frac{3\cdot 2^n}{4n}x+\frac{3}{4n}+\frac{9}{16}$$

であるから



$$S_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left\{\left(x^{\frac{2}{n}}-1\right)^2-\left(-\frac{3\cdot 2^n}{4n}x+\frac{3}{4n}+\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(x^{\frac{4}{n}}-2x^{\frac{2}{n}}+1\right)dx\ -\left(\frac{9}{16}+\frac{3}{8n}\right)\cdot\frac{1}{2^n}$$

$T_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(x^{\frac{4}{n}}-2x^{\frac{2}{n}}+1\right)dx$ とおくと

$$T_n=\left[\frac{1}{\frac{4}{n}+1}x^{\frac{4}{n}+1}-\frac{2}{\frac{2}{n}+1}x^{\frac{2}{n}+1}+x\right]_0^{\frac{1}{2^n}}$$

$$=\frac{n}{n+4}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{4}{n}+1}-\frac{2n}{n+2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{2}{n}+1}+\frac{1}{2^n}$$

$$=\left\{\frac{n}{16(n+4)}-\frac{n}{2(n+2)}+1\right\}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=\left\{\frac{1}{16}-\frac{1}{4(n+4)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+1\right\}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=\left\{\frac{9}{16}-\frac{1}{4(n+4)}+\frac{1}{n+2}\right\}\cdot\frac{1}{2^n}$$

よって

$$S_n=\left\{\frac{9}{16}-\frac{1}{4(n+4)}+\frac{1}{n+2}-\frac{9}{16}-\frac{3}{8n}\right\}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=\left\{-\frac{1}{4(n+4)}+\frac{1}{n+2}-\frac{3}{8n}\right\}\cdot\frac{1}{2^n}$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}2^n nS_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{4(n+4)}+\frac{n}{n+2}-\frac{3}{8}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{4\left(1+\frac{4}{n}\right)}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}-\frac{3}{8}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}+1-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{3}{8}$$

…[答]

高松高等予備校

数学　２０２　その４

(1)　題意より

$p_0=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$ …[答]

$p_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{2\cdot 3}{10}=\dfrac{3}{5}$ …[答]

$p_2=1-(p_0+p_1)=\dfrac{1}{10}$ …[答]

(2)　$p_5=p_6$ より

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_5\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-5}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}=\frac{{}_n\mathrm{C}_6\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-6}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}$$

だから

$$\frac{n\,!}{5!(n-5)!}\cdot\frac{m\,!}{(n-5)!(m-n+5)!}=\frac{n\,!}{6!(n-6)!}\cdot\frac{m\,!}{(n-6)!(m-n+6)!}$$

$$\frac{6!}{5!}\cdot\frac{(m-n+6)!}{(m-n+5)!}=\frac{(n-5)!}{(n-6)!}\cdot\frac{(n-5)!}{(n-6)!}$$

$$6\cdot(m-n+6)=(n-5)\cdot(n-5)$$

$$6m=n^2-4n-11$$

$$=(n-2)^2-15$$

これより

$$n=6l-1$$

とあらわせる。ただし，l は整数

また，$m>n$ より

$$6n<n^4-4n-11$$

$$(n-11)(n+1)>0$$

これより

$$n\geqq 12$$

だから

$$l\geqq 3$$

$l=3$のとき，$n=17$，$m=35$

で適するから，求める(n, m)は

$(n, m)=(17, 35)$ …[答]

(3)　$d_2>d_3$ より

$$\left|\frac{n}{n+m}-\frac{2}{n}\right|>\left|\frac{n}{n+m}-\frac{3}{n}\right|$$

$$\left(\frac{n}{n+m}-\frac{2}{n}\right)^2-\left(\frac{n}{n+m}-\frac{3}{n}\right)^2>0$$

$$\left\{\left(\frac{n}{n+m}-\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{n}{n+m}-\frac{3}{n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{n}{n+m}-\frac{2}{n}\right)-\left(\frac{n}{n+m}-\frac{3}{n}\right)\right\}>0$$

$$\left(\frac{2n}{n+m}-\frac{5}{n}\right)\frac{1}{n}>0$$

$$2n^2-5(n+m)>0$$

$$m<\frac{n(2n-5)}{5} \quad \cdots①$$

これと，$n<m$ より

$$n\geqq 6$$

また，$p_2>p_3$ より(2)と同様な計算をして

$$3(m-n+3)>(n-2)\cdot(n-2)$$

$$m>\frac{n^2-n-5}{3} \quad \cdots②$$

①，②より

$$\frac{n^2-n-5}{3}<m<\frac{2n^2-5n}{5}$$

$6\leqq n\leqq 8$ のときは，このような整数 m は存在しない。

$n=9$ のとき $m=23$ となるから，

求める(n, m)は

$(n, m)=(9, 23)$ …[答]

高松高等予備校