

# 平成 27 年度入学試験問題

## 数 学

(数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B)

### 注 意

- 1 問題冊子は 1 冊 (2 ページ), 解答用紙は 4 枚, 下書き用紙は 3 枚です。
- 2 問題冊子の印刷不良, ページの落丁・乱丁, 及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄 2 箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は, すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。また, 答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。ただし, 解答用紙の裏面は採点の対象になりません。
- 5 試験終了後, 問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

## 数 学 (数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B)

1

$n$  を 2 以上の自然数とし、1 から  $n$  までの自然数  $k$  に対して、番号  $k$  をつけたカードをそれぞれ  $k$  枚用意する。これらすべてを箱に入れ、箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき、次の問い合わせに答えよ。

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。
- (2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも  $k$  である確率を  $n$  と  $k$  の式で表せ。
- (3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を  $n$  の式で表せ。
- (4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち、2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を  $n$  の式で表せ。

2

座標空間内に 3 点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  をとり、2 つのベクトル  $\vec{AP}$  と  $\vec{BP} + \vec{CP}$  の内積が 0 になるような点  $P(x, y, z)$  の集合を  $S$  とする。3 点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を通る平面を  $\alpha$  とするとき、次の問い合わせに答えよ。

- (1) 集合  $S$  は球面であることを示し、その中心  $Q$  の座標と半径  $r$  の値を求めよ。
- (2) 原点  $O$  から最も遠い距離にある  $S$  上の点の座標を求めよ。
- (3) (1) で求めた点  $Q$  は、平面  $\alpha$  上にあることを示せ。
- (4) (1) で求めた点  $Q$  を通つて平面  $\alpha$  に垂直な直線を  $\ell$  とする。球面  $S$  と直線  $\ell$  のすべての共有点について、その座標を求めよ。

3

自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、関数  $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$  を考える。

- (1) 曲線  $y = f_n(x)$  上の点  $(a_n, f_n(a_n))$  における接線が原点を通るとき、 $a_n$  を  $n$  の式で表せ。ただし、 $a_n > 0$  とする。
- (2)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で、曲線  $y = f_n(x)$  と  $x$  軸とで囲まれた図形の面積を  $B_n$  とする。また、(1) で求めた  $a_n$  に対して、 $0 \leq x \leq a_n$  の範囲で、曲線  $y = f_n(x)$ ,  $x$  軸、および直線  $x = a_n$  で囲まれた図形の面積を  $C_n$  とする。 $B_n$  および  $C_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3) (2) で求めた  $B_n$  および  $C_n$  に対して、極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}$  を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  が自然対数の底  $e$  であることを用いてよい。

4

座標空間内の 8 点

$(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  を頂点とする立方体を考える。 $0 < t < 3$  のとき、3 点  $(t, 0, 0)$ ,  $(0, t, 0)$ ,  $(0, 0, t)$  を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を  $f(t)$  とし、 $f(0) = f(3) = 0$  とする。関数  $f(t)$  について、次の問い合わせに答えよ。

- (1)  $0 \leq t \leq 3$  のとき、 $f(t)$  を  $t$  の式で表せ。
- (2) 関数  $f(t)$  の  $0 \leq t \leq 3$  における最大値を求めよ。
- (3) 定積分  $\int_0^3 f(t) dt$  の値を求めよ。